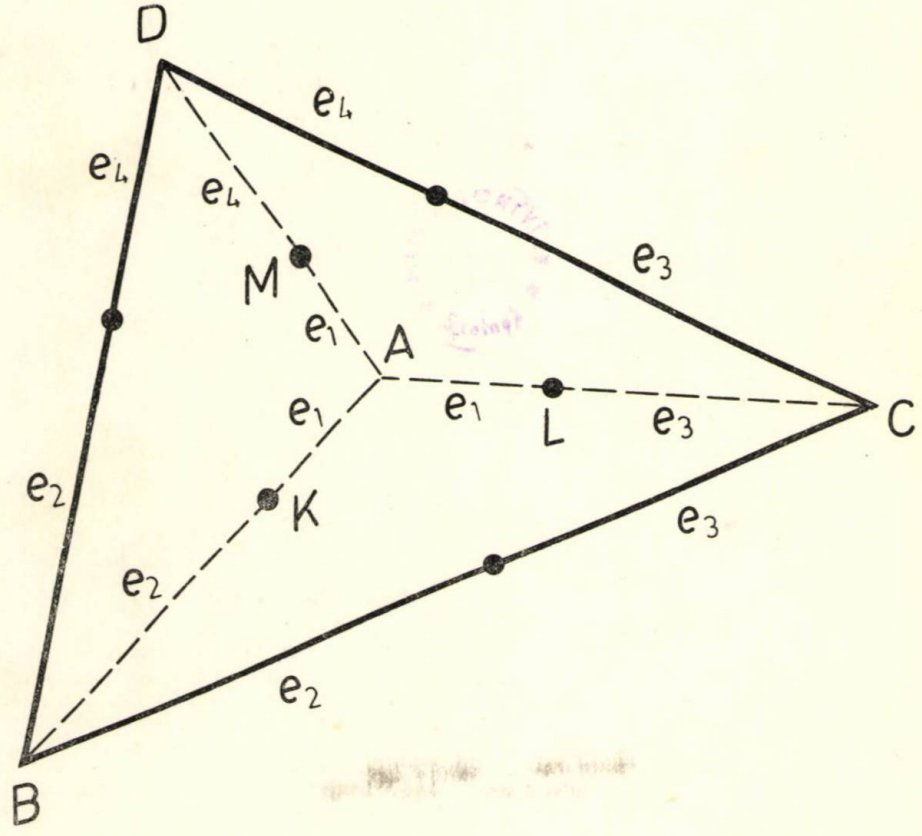
A Matematika Tanítása

Az Oktatási Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



1980. Február * XXVII. évfolyam 1 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

AZ OKTATÁSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS LÁSZLÓ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, REMÉNYI GUSZTÁV, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200.
79-4795 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

„Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivataloknál és a Posta Központi Hírlap Irodánál (postacím: Budapest, V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96162 pénzforgalmi jelzőszámra. Előfizetési díj egész évre 27,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 4,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

A szerkesztőség kérése a lap olvasóitól 1
Tompa Klára: Tájékoztató az Országos Oktatástechnikai Központról 1
Koller Lászlóné: Szakmunkásképző iskolák tantervi követelményrendszere matematikából (kísérleti anyag). I. osztály, 2. rész 4
Sebestyén József: Beszámoló a Tanárképző Főiskolák 1979. évi Országos Matematikai Tanulmányi Versenyéről 13
Dr. Surányi János: Az „$(a+b)(a-b)$"-től az exponenciális függvényig. Egy jól ismert azonosság új alkalmazása 20

FELADATOK 25

СОДЕРЖАНИЕ

Просьба редакции к читателям журнала 1
Томпа Клара: Информации об Общегосударственном Центре Средств Обучения 1
Коллер Ласлонэ: Система требований программ для профессиональных школ по математики (экспериментальный материал). Кл. I. часть 2. 4
Шебештьен Йожеф: Отчет о Математическом Соревновании Педагогических Институт в году 1979. 13
Др. Шурани Янош: От „$(a+b)(a-b)$" до показательной функции. Новое применение известного тождества 20

ЗАДАЧИ 25

INHALT

Eine Bitte der Redaktion an die Leser der Zeitschrift 1
Tompa, Klára: Information über das Nationale Unterrichtstechnische Zentrum 1
Frau Marianne Koller (geb.: *Sátori*): Ein Anforderungssystem aus der Mathematik für die Berufsschulen (Versuchsmaterial). I. Klasse, 2. Teil 4
Sebestyén, József: Bericht über den Mathematik-Wettbewerb der Studenten der Pädagogischen Hochschulen im Jahre 1979 13
Dr. Surányi János: Vom „$(a+b)(a-b)$" bis die Exponentialfunktion. Eine neue Anwendung einer wohlbekannter Identität 20

AUFGABEN 25

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

1980. ÉVI XXVII. ÉVFOLYAMÁNAK TARTALMA

A Bolyai János Matematikai Társulat versenye matematikatanárok számára 2/46, 4/111
Ács Pál: A Tankönyvkiadó Vállalat Matematikai Szerkesztőségének munkájáról 2/33
Appel György: Matematikai írásvetítő transzparensek jegyzéke 2/43
A szerkesztőség kérése a lap olvasóitól 1/1
Az Iskolarádió matematika tárgyú adásai az 1980—81. tanévben 4/113
Balázs László: Az általános iskolák és szakmunkásképző intézetek matematikatanításának koordinálása Heves megyében 3/65
Beck József: Amőba-játékok 2/47
Bencze Mihály: Néhány sor alkalmazása a számelméletben 5/138
Bereznai Gyula—Dr. Varecza Árpád: Megjegyzés egy versenyfeladathoz 5/155
Dr. Bognár Jánosné—Dr. Nemetz Tibor: Játék és valószínűség 3/76
Előd Istvánné: Mi jelent meg eddig az általános és középiskolai új matematika-tantervek és a hozzájuk csatlakozó dokumentumok közül? 2/38
Fitos László: Négy gömb hasonlósági pontjaira vonatkozó tételek 2/62
Hódi Endre: Magyar tanulók részvétele a 31. Évenkénti Középiskolai Matematikai Versenyvizsgán 5/142
Hódi Endre: Rövid beszámoló a finnországi nemzetközi matematikai tanulmányi versenyről 5/148
Dr. Horváth Jenő: A nem-euklideszi geometria elemei a középiskolában I. 6/161
Dr. Hosszú Miklós: A bűvös kocka 4/107
Katz Sándor: A bizonyítási készség fejlesztése függvénytani feladatok segítségével 5/129
Koller Lászlóné: Szakmunkásképző iskolák tantervi követelményrendszere matematikából (kísérleti anyag). I. osztály, 2. rész 1/4
Dr. Korányi Erzsébet: Felelet a „Kételyek és aggályok"-ra 5/151
Kovács Zoltán: Zsebszámolók programjainak elágaztatása 4/102
Közlemény 4/121
Közlemény a matematikai jelölésekre vonatkozó hatályos országos szabványokról 3/75
Dr. Králik Dezső: A függvényfogalom fejlődése Galileitől napjainkig 3/66
„Matematikatanárok versenyé"-nek 1979. évi győztesei 4/111
Pogáts Ferenc: Kételyek és aggályok 2/55
Rácz János: Egy érettségi feladat ürügyén. (Megjegyzések a trigonometrikus egyenletek tanításáról.) 6/168
Dr. Rédling Elemér: A deduktív gondolkodásmód fejlesztéséről 5/133
Dr. Rédling Elemér: A geometriai transzformáció fogalmának kialakításáról 2/59
Rozgonyi Tibor: Jelentés a Tanárképző Főiskolák 1980. évi Országos Matematikai Tanulmányi Versenyéről 4/115
Dr. Scharnitzky Viktor: Matematikus Vándorgyűlés Salgótarjánban 5/159
Sebestyén József: Beszámoló a Tanárképző Főiskolák 1979. évi Országos Matematikai Tanulmányi Versenyéről 1/13
Dr. Surányi János: A következő tantervi reform előkészítése a középiskolai matematikaoktatás területén 4/97
Dr. Surányi János: Az „$(a+b)(a-b)$"-től az exponenciális függvényig. Egy jól ismert azonosság új alkalmazása 1/20
Süveges Katalin: Tájékoztató a TANÉRT új matematikai taneszközeiről 2/41
Tomori Ilona: A racionális számok összeadásának és kivonásának tanítása az általános iskola 6. osztályában 6/182
Tompa Klára: Tájékoztató az Országos Oktatástechnikai Központról 1/1
Dr. Varecza Árpád: A számozott pontú fák számáról 3/85

FELADATOK 1/25, 3/89, 4/121, 5/III, 6/185

Helyreigazítás 3/II, 5/IV

A szerkesztőség kérése a lap olvasóitól

A Matematika Tanításának szerkesztő bizottsága a múlt év október hó 5-én ülést tartott. Ezen többek között olyan javaslat is elhangzott, hogy e módszertani folyóirat hasznosságának és hatékonyságának növelése céljából kérdezzük meg az olvasókat, milyen igényeik, milyen elvárásaik vannak a lappal kapcsolatban.

Kérjük tehát Kedves Olvasóinkat, hogy szíveskedjenek válaszolni az alábbi kérdésekre:

1. Mit tart jónak a lapban?
2. Mit rossznak?
3. Mit fölöslegesnek?
4. Mit hiányol belőle?
5. Egyéb javaslatai.
6. Mely iskolatípus (általános iskola — külön alsó, illetve felső tagozat —, szakmunkásképző iskola, szakközépiskola, gimnázium) nevelőinek szóló közlemények érdeklik? (Több iskolatípus is megnevezhető.)

Válaszukban nem szükséges megismételni a kérdéseket: elegendő csak azok sorszámának megadása. A válaszoknak a szerkesztőség címére történő beküldését — aláírással vagy anélkül — legkésőbb f. évi május 1-ig kérjük.

Előre is köszönjük a Kedves Olvasóknak munkánk jobbá tétele érdekében kifejtett szíves fáradozását.

A szerkesztőség

TOMPA KLÁRA
szerkesztő
OOK

Tájékoztató az Országos Oktatástechnikai Központról

Jelen cikkben egy oktatással, kutatással és az új tantervek megvalósításához szükséges információhordozók fejlesztésével foglalkozó intézményt mutatunk be. A bemutatás nem teljes, nem lehet teljes, mert elsősorban arra koncentráltunk, hogy milyen tevékenységekkel jellemezhetjük az intézményt a matematikaoktatás szempontjából. De nem lehet teljes azért sem, mert e tevékenységekből is csak szemelvények bemutatására nyílik lehetőség e lap keretein belül. Legfontosabb célunk tehát, hogy praktikus ismereteket, hasznos információkat adjunk a matematikatanárok számára az Országos Oktatástechnikai Központról.

Az Oktatási Minisztérium viszonylag fiatal intézménye, az Országos Oktatástechnikai Központ, 1973-ban alakult. Fő feladataként azt jelölték meg, hogy országos szinten hangolja össze és egyes esetekben valósítsa meg a korszerű, új oktatástechnikai anyagok előállítását és elosztását, teremtse meg az oktatástechnikai (oktatástechnológiai) képzést, továbbképzést, valamint végezze, illetve végeztesse el a fejlesztéshez szükséges kutatásokat. [A miniszteri alapító rendelet száma: 110/1973. (M. K. 5.)]

Mivel korábban az oktatástechnológia terjesztése nem volt intézményesített, a kezdeti időben a Központ fő feladata — egyéb műszaki tevékenységek mellett — az oktatástechnikai képzés megteremtése volt. Ebben az időszakban 9 és 2 hónapos tanfolyamokon vettek részt — többek között — a megyei pedagógus továbbképző intézetek, valamint a pedagógusképző intézmények oktatástechnikai fe-

lelősei, esetenként szaktanárai, szakfelügyelői. (Az általános oktatástechnikai tanfolyamok ma már a megyékben zajlanak az oktatástechnikai felelősök irányításával.)

A tanfolyamok lebonyolításával egy időben készültek el olyan jegyzetek, filmek, diaképek, írásvetítő transzparensek, videofelvételek stb., amelyeknek tanulmányozásával a gyakorló pedagógusok hasznos ismereteket szerezhetnek az audiovizuális eszközök szakszerű felhasználására vonatkozóan. Az egyszerűbben készíthető információhordozók (diaképek, hangosított diasorozatok, írásvetítő fóliák) tervezéséhez és elkészítéséhez is segítséget nyújtanak a kiadványok. (Beszerzésük, illetve kölcsönzésük módjáról a későbbiekben szólunk.) E kiadványok közül szeretnénk felhívni a figyelmet a szakfelügyelők számára készített Oktatástechnikai alapismeretek című jegyzetre (OOK, Veszprém 1978.), amely a szakfelügyeleti munka oktatástechnikai vonatkozásait hivatott segíteni. E jegyzet javaslatot tesz a központi taneszközellátást — szükségszerűen — kiegészítő helyi, például munkaközösségi taneszközkészítés formáira, módszereire, az oktatástechnikai továbbképzés tartalmára vonatkozólag. Szempontrendszert ad a helyi készítésű ismerethordozók értékeléséhez, valamint az oktatástechnikai eszközök és anyagok alkalmazásának megfigyeléséhez.

Az Országos Oktatástechnikai Központ jelentős mértékben járult hozzá ahhoz is, hogy az egyetemekről kikerülő tanárszakos hallgatók mindegyike egy féléves stúdium keretében megismerkedjék az oktatástechnikai eszközök kezelésével, felhasználásával és az információhordozók készítésének eljárásaival. (Csak érdekességként említjük, hogy a speciálkollégium keretei között folyó kísérleti stúdiumot éppen matematika—fizika szakos hallgatók körében indították az ELTE-n.)

A képzés (oktatástechnikai, oktatástechnológiai) mellett az Országos Oktatástechnikai Központnak ma már igen jelentős feladata az új tantervek realizálásához szükséges információhordozók fejlesztése, valamint kutatások az információhordozókkal kapcsolatosan.

A tantervek megvalósításához szükséges információhordozók válogatását, meghatározását egy szaktárgyi referensekből, szerkesztőkből álló bizottság végzi. E bizottságban részt vesz az Országos Pedagógiai Intézet, a TANÉRT Vállalat, az Országos Oktatástechnikai Központ, esetenként az Iskolarádió, az Iskolatelevízió és a Tankönyvkiadó megfelelő szaktárgyi szakembere. Az általuk elkészített taneszközlistát az Oktatási Minisztérium bírálja felül és hagyja jóvá. Az Országos Oktatástechnikai Központ a listán szereplő audiovizuális információhordozók (diakép, hangosított diasorozat, írásvetítő fólia és film) sokszorosítható példányainak elkészítéséért felelős; egyéb anyagok fejlesztését, készítését a többi intézmény végzi.

A tantervi információhordozó-fejlesztés keretében a matematika-tantárgy oktatásához készítettünk néhány filmet és diaképet. Például egy 205 db színes diaképből álló sorozat készült el a tanulók differenciált foglalkoztatásához az általános iskolák 1—2. osztályai számára.

A diaképek a matematika-tanterv által előírt tananyaghoz és követelményekhez igazodva, a munkalapokkal és a matematika tanításához szükséges egyéb taneszközökkel együttesen alkalmazva járulnak hozzá az oktatási-nevelési feladatok megvalósításához.

A diaképek célja kettős. A képekben megfogalmazott feladatok példatárat nyújthatnak a pedagógusoknak, s így gazdagíthatják tanítási eszközkészletüket. Másrészt azt reméljük, hogy a gyermekek életkorához, előismereteihez igazodó, esztétikus, egyszerű, egységes kivitelű képek serkentik a gyerekeket a matematikai tevékenységek elvégzésére. A diaképsorozat témakörönként az alábbiak szerint oszlik meg:

Témakör	1. osztály	2. osztály
Halmazok, logika	21 kép	27 kép
Számtan, algebra	27 kép	26 kép
Relációk, függvények, sorozatok	34 kép	21 kép
Kombinatorika, valószínűség	7 kép	11 kép
Geometria, mérés	12 kép	19 kép
	101 kép	104 kép

A diaképek felhasználhatók a tanulók egyéni, kiscsoportos és osztályméretű foglalkoztatására. A különféle didaktikai feladatok megoldásában egyaránt hasznosak lehetnek: vezérlik az eszközökkel való tevékenységeket, segítik az ellenőrzést, gyakorlási lehetőségeket biztosítanak stb.

A diaképsorozatot kiegészíti egy részletes útmutató, amely alternatív javaslatokat tesz az egyes képek felhasználására.

A diaképeket a Taneszköz Bizottság elfogadta, s a TANÉRT Vállalat sokszorosítása révén a közeljövőben kerülnek az iskolákba.

Elkészített filmjeink némelyike közvetlenül az iskolai felhasználásra készült (Euler-tétel; Illeszkedési feladatok; Számológép; Tükrözés stb.), másokat viszont elsősorban a pedagógus továbbképzésben lehet felhasználni (Játék az iskolában; A kettes számrendszer; Logikai készlet; Színes rudak stb.).

A Logikai készlet című film a 48 elemet tartalmazó, a gyerekeknek szóló munkaeszköz bemutatásával egy időben tárgyalja a halmazokkal kapcsolatos alapfogalmakat (alaphalmaz, részhalmaz, a halmaz számossága stb.), halmazműveleteket (metszet, unió, különbség), illetve a halmazműveletek és a matematikai logika néhány fogalmának kapcsolatát (konjunkció, diszjunkció).

Filmjeink zömmel az oktatófilmek tárolásával és kölcsönzésével megbízott filmtárakból szerezhetők be.

Az információhordozókkal történő tanítás hatékonyságát vizsgáló kutatásaink keretében készítettük el a Ponthalmazok című oktatócsomagot. Kutatásunkban azt vizsgáltuk, hogyan hat a pedagógiai munkára, illetve a tanulók teljesítményére, ha egy kidolgozott követelményrendszeren alapuló, gondosan megtervezett eszközegyüttest használnak tanulók és tanárok egyaránt. Az OOK az ELTE Matematikai Szakmódszertani Csoportjának és gyakorló pedagógusoknak közreműködésével hozta létre — szigorúbb pedagógiai tervezést követve — a hazai első matematikai oktatócsomagot. A tanulók tantárgyi teljesítményeinek, attitüdjeinek vizsgálatai, valamint a pedagógusok és a gyerekek véleménye alapján az oktatócsomagról egyértelműen pozitív tapasztalatokat szereztünk. (A kutatásról részletesebb beszámoló jelent meg az ELTE Szakmódszertani Közleményeiben 1977-ben, Megyesi László tollából, Oktatócsomag az új tanterv első fejezetéhez, a Ponthalmazokhoz címmel.)

A kísérlet során nemcsak az oktatástechnológiai fejlesztésekhez nyertünk szakmai tapasztalatokat, hanem az új tantervek megvalósítását segítő audiovizuális információhordozók birtokába is jutottunk. Az oktatócsomag részeként készült el két 16 mm-es hangos film „A tárgyak formájától a pontig", illetve az „Ismerkedés ponthalmazokkal". Az első film a matematika valóságeredetét és a gyakorlati élettel való kapcsolatát mutatja be. Azt az absztrakciós folyamatot kívánja elősegíteni és élményszerűvé tenni, amellyel a tanulók a dimenziólebontás segítségével eljutnak a valóságos térformáktól a pont fogalmáig. A második film kellő szemléltetéssel kívánja elősegíteni néhány ponthalmaz és azok kölcsönös helyzetei fogalmának megértését. A filmeken kívül 2 írásvetítő fóliasorozat és két korrepetáló hangosított diasorozat alkotja az oktatócsomag audiovizuális elemeit. Ezeket az információhordozókat a közeljövőben a Taneszköz Bizottság elé terjesztjük országos hasznosításra való jóváhagyás céljából.

Az elkövetkező időszak legfontosabb tevékenysége az Oktatási Minisztérium által kért információhordozók elkészítése lesz. Ennek keretében folytatjuk az alsó tagozat számára készülő matematika diasorozatot, s 200 db diaképet készítünk a 3—4. osztály számára. A középiskolák közül most a szakközépiskolák részesülnek előnyben: diaképeket és írásvetítő transzparenseket készítünk az új tantervekhez. (Bár elképzelhető, hogy azok felhasználhatók lesznek a gimnáziumi matematikaoktatásban is.)

A jövőben szeretnénk jobban felkarolni a gyakorló pedagógusok információhordozó készítési kezdeményezéseit, s munkánkban jobban támaszkodni rájuk. A Központ ennek érdekében pályázati rendszer kidolgozásán is munkálkodik, amelyről a későbbiekben nyújtunk tájékoztatást.

Végül említést kell tenni arról, hogy az Országos Oktatástechnikai Központ hétfőtől-péntekig naponta 8—16 óráig üzemelő „nyitott" Könyv- és Médiatárral rendelkezik. A Könyv- és Médiatárban („Könyv- és Információhordozótár") könyveken, folyóiratokon kívül megtalálhatók olyan magyar és idegen nyelvű audiovizuális ismerethordozók, amelyek felhasználhatók a kutatásban, az oktatástechnológiai képzésben és továbbképzésben, valamint a közoktatásban. A helyben történő szakmai ismeretek bővítéséhez igénybe vehetők mindazok a technikai eszközök, amelyekkel felhasználhatók az — oktatásban is egyre jobban elterjedő — audiovizuális ismerethordozók (diavetítő, írásvetítő, filmvetítő, képmagnetofon, mikrofilm-leolvasó stb.). A Könyv- és Médiatár szolgáltatásait igénybe vehetik intézmények, személyek, az oktatás-nevelés területén dolgozó pedagógusok. A beiratkozáshoz csak a személyi adatok igazolása szükséges. A kölcsönzés díjtalan!

A Központ saját kiadványairól — kérésre, illetve rendszeres kiadványaiban — az Információs és Dokumentációs Osztály ad tájékoztatást.

A Központ adatai:

Országos Oktatástechnikai Központ
Veszprém
Schönherz Zoltán u. 2.
Pf. 543.
8201
Telefon: 11-351, 11-352. 11-353

KOLLER LÁSZLÓNÉ
főelőadó
Országos Pedagógiai Intézet

Szakmunkásképző iskolák tantervi követelményrendszere matematikából

kísérleti anyag I. osztály, 2. rész

II. téma: Pitagorasz tétele — kb. 20 óra

Nevelési területek (feladatok)

Ez az első témakör, amelynek igen sok szakmában szakmai vonatkozásai is vannak. Használjuk fel az alkalmat és mutassuk meg a matematika alkalmazhatóságát. A téma feldolgozása a munkalapokon olyan, hogy a tanulók bizonyos tapasztalatszerzés után maguktól is megsejthetik a tételt, ki is mondhatják, esetleg bizonyítani is tudják. Adjunk tág teret a felfedezés örömének, ezzel sokat tehetünk annak érdekében, hogy megszeressék a matematikát, és ne féljenek tőle.

A tétellel kapcsolatosan a bizonyítási igény felkeltése igen fontos a logikus gondolkodásra nevelés szempontjából. Tétel és annak bizonyítása igen kevésszer fordul elő a szakmunkásképző iskolai matematika oktatásában, ezért itt feltétlenül éljünk ezzel a lehetőséggel. A táblázatok használata igen figyelmes munkát igényel. Neveljük a tanulókat figyelemösszpontosításra és pontos munkára!

Ismeretek, képzési feladatok

Értsék, hogy mit jelent a mérés: hányszor fér el a lemérendő mennyiségben a mértékegység, a mértékegység tetszőlegesen megválasztható, a mennyiséget két adattal jellemezhetjük: mérőszámmal és mértékegységgel.

Értsék a két határ közé szorítás gondolatát. Értsék, hogy a mértékegység finomításával a mérőszámokkal kifejezett két határ közeledik egymáshoz, és mindkettő egyre jobban közelít a mennyiség ugyanazon mértékegységgel mért mérőszámához. Értsék, hogy a mérőszám és mértékegység között fordított arányosság áll fönn.

Ismerjék az egyezményes mértékegységeket. Biztonságosan tudjanak mértékegységeket átváltani (alkalmazási szint). Tudjanak helyesen kerekíteni.

Ismerjék a tantervben felsorolt síkidomokat és testeket, ezek leglényegesebb tulajdonságait. Fel tudják ismerni az egyes alakzatokat jellemző tulajdonságaik alapján.

Tudjanak síkidomokat célszerűen átdarabolni (felismerési szint).

Tudják, hogy a részek területének összege megegyezik az egész területével (alkalmazási szint).

Biztonságosan tudják kiszámítani az egyes — általános iskolából ismert — síkidomok kerületét és területét, valamint ugyancsak az általános iskolából ismert testek felszínét és térfogatát (alkalmazási szint).

Ismerjék a Pitagorasz tételt. Értsék meg a tétel bizonyítását. Tudják a tételt alkalmazni kerület-, terület-, felszín- és térfogatszámítási feladatokban.

Pontosan ismerjék fel a tétel érvényességi körét (értsék, hogy nem derékszögű háromszögre nem érvényes).

Értsék a tétel megfordíthatóságát és azt, hogy nem minden tétel megfordítható. Értsék meg, hogy a szemlélet alapján történő belátás nem pótolja a bizonyítást. Ismerjék fel a tétel alkalmazhatóságát összetettebb feladatokban is.

Értsék meg, hogy mit értünk egy szám négyzetén, illetve négyzetgyökén. Ismerjék fel a kettő közt fennálló kapcsolatot. Tudják használni a számok négyzete, illetve négyzetgyöke táblázatot.

Ismerjék fel, hogy az egyik táblázat is elég lenne mindkettő kikeresésére.

100-nál nagyobb és 1-nél kisebb számokat tudjanak egy 1-nél nagyobb 100-nál kisebb szám és 10 megfelelő hatványának hányadosa, illetve szorzata alakjában felírni (alkalmazási szinten).

Ismerjék a szorzat és hányados négyzetére és négyzetgyökére vonatkozó azonosságot (alkalmazási szinten).

Tudják kikeresni a táblázatból 1-nél kisebb és 100-nál nagyobb számok négyzetét és négyzetgyökét (alkalmazási szinten).

Tudjanak sorozatokat, táblázatokat és grafikonokat készíteni négyzetre emelés és négyzetgyökvonás segítségével. (Ez tulajdonképpen az $y=x^2$, illetve $y=\sqrt{x}$ függvények mint nem lineáris függvények legegyszerűbb tulajdonságainak szemléleten alapuló ismeretét jelenti.)

III. téma: Szögfüggvények derékszögű háromszögben kb. 19 óra

Nevelési területek (feladatok)

Itt is igen jól meg tudjuk mutatni a matematika alkalmazhatóságát. Igen sok szakmában lehetőség nyílik erre.

Nagyon lényeges nevelési feladat itt is a figyelem összpontosítására, szögfüggvénytáblázatok precíz használatára, és a pontos értelemszerű munkára nevelés.

Ismeretek, képzési feladatok

Tudják, hogy mit értünk szakaszok arányán. Fel tudják írni adott szakaszok arányát. Az egyik szakasz nagysága és a két szakasz aránya alapján ki tudják számítani a másik szakasz hosszát. Ismerjék fel a hasonlóságot a síkidomok körében.

Ismerjék a háromszögek hasonlóságának a tantervben szereplő alapeseteit.

Értsék meg, hogy az egybevágóság a hasonlóságnak az a speciális esete, ahol a hasonlóság aránya: 1.

Tudják, hogy hány és milyen adat alapján állapítható meg két derékszögű háromszögről, hogy hasonlóak-e egymáshoz.

Ismerjék a derékszögű háromszögben a sinus, cosinus, tangens és cotangens arányokat.

Értsék, hogy hasonló háromszögek esetében az egyes megfelelő arányok: az egyes szögfüggvényértékek megegyeznek.

Tudjanak derékszögű háromszögeket szerkeszteni adott szögfüggvényérték alapján.

Ismerjék fel, hogy a 0-nál nagyobb és 90°-nál kisebb szögekhez tartozó tangens- és sinusfüggvények értéke a szögek növekedésével nő a cotangens- és cosinusfüggvények értéke viszont csökken.

Ismerjék fel, hogy ez se nem egyenes, se nem fordított arányosság.

Biztonságosan tudják használni a szögfüggvénytáblázatot (alkalmazási szint).

Értsék, hogy milyen összefüggés van egy szög és pótszögének szögfüggvényei közt.

Tudják kiszámítani a szögfüggvények segítségével a derékszögű háromszög hiányzó adatait (alkalmazási szint).

Tudjanak táblázatokat és grafikonokat készíteni a szögfüggvények segítségével (az $y=\operatorname{tg}\alpha$, $y=\sin\alpha$, $y=\operatorname{ctg}\alpha$, $y=\cos\alpha$, $0<\alpha<90°$ függvények legegyszerűbb szemléletes tulajdonságainak felismerése).

Tudjanak szöveges feladatokat megoldani szögfüggvények segítségével. (Alkalmazni tudják a szögfüggvényekről tanultakat, kerület-, terület-, felszín- és térfogatszámítási feladatokban).

Tudják alkalmazni a szögfüggvényeket összetettebb feladatok megoldásában is.

IV. téma: Függvény kb. 19 óra

Nevelési területek (feladatok)

Ez a témakör igen nagy jelentőségű a logikus gondolkodásra nevelés szempontjából. Sok, nem matematikai példán keresztül is mutassuk meg a függvénykapcsolat lényegét, ezzel rávilágíthatunk a matematika és a valóság kapcsolatára. Ügyeljünk a gondosan megválasztott példákra.

Mindemellett természetesen itt is érvényesek mindazok az általános nevelési célkitűzések, amelyeket a tanterv és a követelményrendszer felsorol.

Ismeretek, képzési feladatok

Tudjanak függvény kapcsolatokat létesíteni nyíl jelöléssel.

Értsék a hozzárendelés fogalmát.

Értsék, hogy függvényt egyértelmű hozzárendelés hoz létre.

Tudjanak tapasztalati táblázatokat készíteni és olvasni.

Tudjanak szabályokat, összefüggéseket felismerni táblázatok alapján. Ezeket képlettel is felírni (ha lehetséges).

Értsék meg, hogy a képlet önmagában nem elég egy függvény megadására, meg kell adni azt az alaphalmazt is, amelyre a képlet vonatkozik.

Tudjanak grafikonokat készíteni táblázat és képlet alapján.

Tudjanak egyszerűbb szabályokat (ha van) leolvasni, táblázatokat készíteni, grafikonok alapján.

Tudják, hogy a nem egyértelmű hozzárendelés nem függvény, hanem bizonyos reláció.

Ismerjék — szemlélet alapján — a következő fogalmakat: függvények folytonossága, szakadás, törés, növekedés, csökkenés, stagnálás, kisebb és nagyobbfokú növekedés, illetve csökkenés.

Tudjanak egyszerűbb mozgási feladatokat grafikus úton megoldani (alkalmazási szinten).

Értsék a koordináta-rendszer lényegét.

Tudjanak értékpárokat ábrázolni koordináta-rendszerben.

Tudjanak koordináta-rendszerben ábrázolt pontokat értékpárral jellemezni.

Értsék a lineáris függvény fogalmát.

Ismerjék fel a lineáris függvényt táblázat, képlet és grafikon alapján.

Ismerjék a lineáris függvény tulajdonságait: leírható $y=ax+b$ alakban, képe egyenesen helyezkedik el, a képletben szereplő „a" szabja meg a függvény képének meredekségét (iránytangens fogalma), „b" pedig azt, hogy az $y=ax$ függvény képét hány egységgel és milyen irányba toltuk el az origóból az y tengely mentén. Ezeket az ismereteket alkalmazni tudják függvények táblázatkészítés nélküli ábrázolásakor.

Tudják, hogy az egyenes arányosság is lineáris függvény.

Tudjanak példát mondani nem lineáris függvényekre is.

Ismerjék fel azokat a tulajdonságokat, amelyek egy adott (konkrét) nem lineáris függvényt megkülönböztetnek a lineáris függvényektől.

Tudjanak ábrázolni táblázat alapján néhány nem lineáris függvényt. Például: $y=x^2$, $y=\frac{1}{x}$.

Ismerjék az $y=x^2$ és az $y=\frac{1}{x}$ függvény eltolásából adódó függvényeket és tudják ezeket táblázat alapján ábrázolni.

MÉRÉSEK

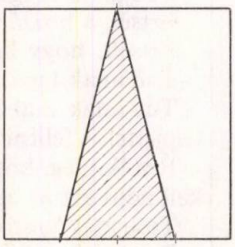
Szakmunkásképző iskolák matematika követelményrendszerének mérése I. osztály 2. téma

A. csoport

1. Egy egyenlő szárú trapéz két párhuzamos oldala 6 cm és 11 cm, a szára 4 cm hosszúságú. Mekkora a trapéz területe?

2. Egy egyenes körkúp alapkörének átmérője 23 cm, alkotója 11 cm hosszú. Mekkora a kúp térfogata?

3. Egy csónak a Balaton partjának bizonyos pontjától Nyugatra 6 km távolságban van. Egy óra múlva már ugyan ettől a ponttól Észak irányban 8 km-re van. Mekkora a csónak sebessége?



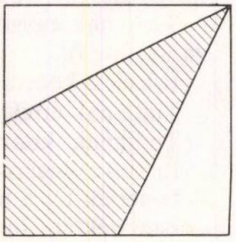
4. A négyzet egyik oldalát megfeleztük, a vele szemköztit pedig négy egyenlő részre osztottuk. Az osztópontokat összekötöttük az ábrán látható módon. Hányadrésze a négyzet területének a bevonalkázott terület?

B. csoport

1. Egy téglalap oldalai 3 és 9 cm hosszúak. Mekkora a köré írható kör területe?

2. Egy négyzetalapú egyenes gúla alapéle 8 cm, oldaléle 11 cm. Mekkora a gúla térfogata?

3. Egy repülő egy tereppont felett 1000 m magasan halad el, az ettől 1,5 km-re levő másik tereppont felett már 2000 m magasan. Hány méter utat tett meg valójában a repülő?



4. A négyzet két oldalát megfeleztük, és a pontokat összekötöttük az egyik csúcsponttal az ábrán látható módon. Hanyadrésze a négyzet területének a bevonalkázott terület?

Eredmények:

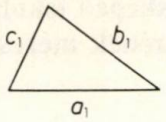
Feladatok	1	2	3	4	Összesen
A feladatra elérhető pontszám	12	15	11	8	46
Teljesítmény %-ban	50,5	36,4	28,6	26,3	36,5

Szakmunkásképző iskolák matematika követelményrendszerének mérése I. osztály 3. téma

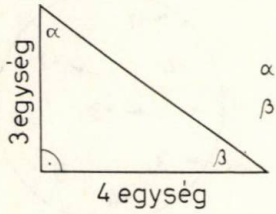
A. csoport

1. Rajzolj az ábrán látható háromszög mellé egy hozzá hasonló másik háromszöget,

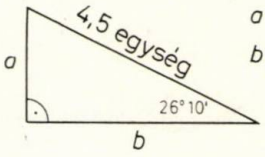
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{4}$ legyen!



2. Az ábrán két derékszögű háromszöget látsz. Számítsd ki a kérdezett adatokat!



α =
β =



a =
b =

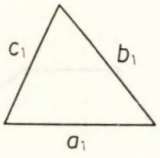
3. Egy kiránduló 530 m-ről (tengerszint feletti magasság) elindulva egy 16°-os lejtőn 10 km-t tesz meg felfelé.
Milyen magasra jut? (Mekkora lesz a tengerszint feletti magassága?)

4. Egy kúp alapkörének átmérője 10 cm. Az alkotó 68°-os szöget zár be az alaplappal. Mekkora a kúp térfogata?

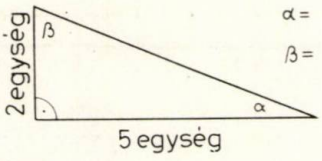
B. csoport

1. Rajzolj az ábrán látható háromszög mellé egy hozzá hasonló másik háromszöget,

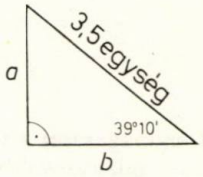
$\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{3}$ legyen!



2. Az ábrán két derékszögű háromszöget látsz. Számítsd ki a kérdezett adatokat!



α =
β =



a =
b =

3. Egy tavon a csónakban ülő ember a 150 m magas világítótorony tetejét 12°-os emelkedési szögben látja. Milyen távol van a csónak a toronytól?

4. Egy négyzet alapú egyenes gúla alapéle 6 cm hosszú, és az oldallapok 48°-os szöget zárnak be az alaplappal. Mekkora a gúla felszíne?

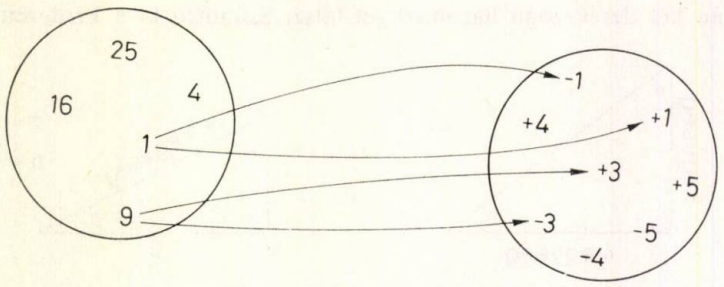
Eredmények:

Feladatok	1.	2.	3.	4.	Összesen
A feladatra elérhető pontszám	2	17	10	14	43
Teljesítmény %-ban	79,9	60,4	50,1	32,2	49,7

Szakmunkásképző iskolák matematika követelményrendszerének mérése I. osztály 4. témakör

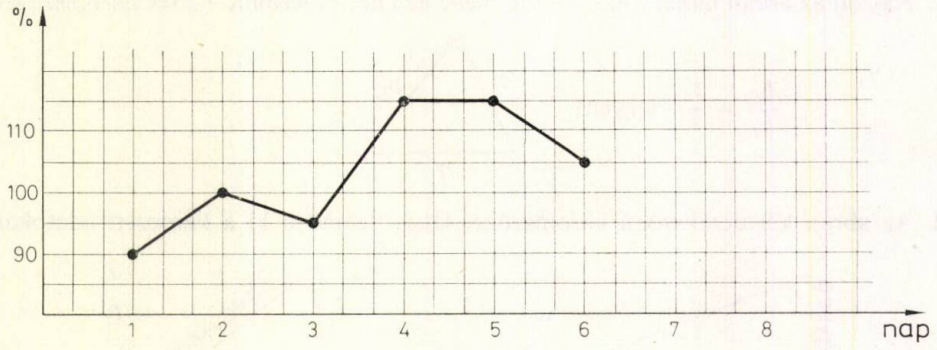
A. csoport

1.



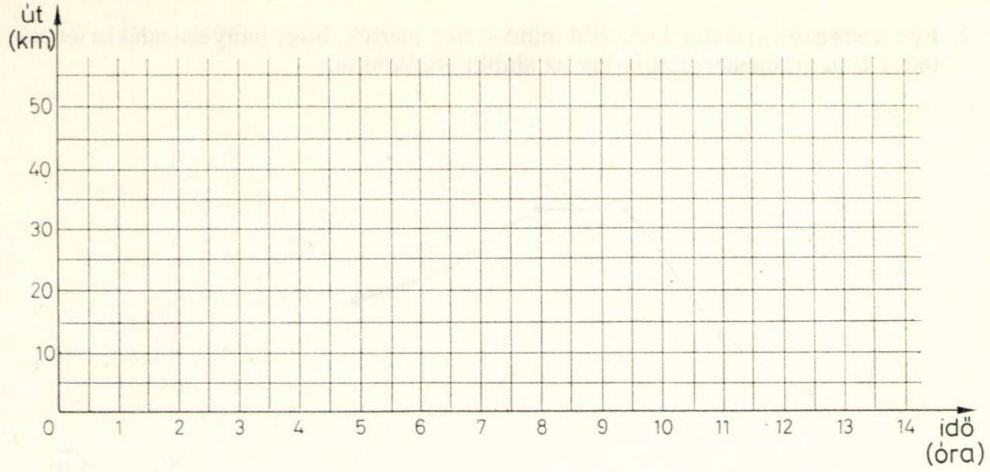
Húzzuk be a hiányzó nyilakat!
Mi a hozzárendelés egy lehetséges szabálya? .....
Függvény-e a fenti hozzárendelés? .....

2. Egy üzemben egy héten keresztül minden nap mérték, hogy hány százalékra teljesítették a napi normát. Ezt látjuk az alábbi grafikonon.

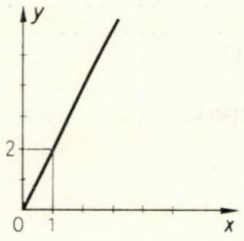


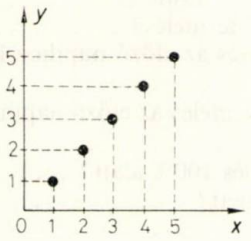
Mikor volt legmagasabb a termelés? .....
Mikor volt a legalacsonyabb a termelés? .....
Mely napokon nőtt a termelés az előző napihoz képest? .....
Mely napokon csökkent a termelés az előző napihoz képest? .....
Mely napokon volt a termelés 100% felett? .....
Mely napokon volt 100% alatt? .....
Mikor volt pont 100%? .....
Mely napokon nem változott a termelés az előző napihoz képest? .....
.....

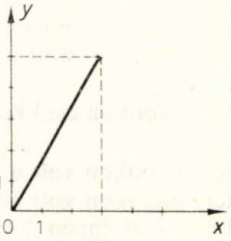
3. Két egymástól 42 km-re levő helységből egyszerre indul egymással szembe (ugyanazon az útvonalon) egy kerékpáros és egy gyalogos. A gyalogos 4 km-t, a kerékpáros 10 km-t tesz meg óránként. Mikor és hol találkoznak? .....
Ábrázoljuk mozgásukat!



4. Írjuk fel a grafikonnal adott függvények képletét és értelmezési tartományukat!







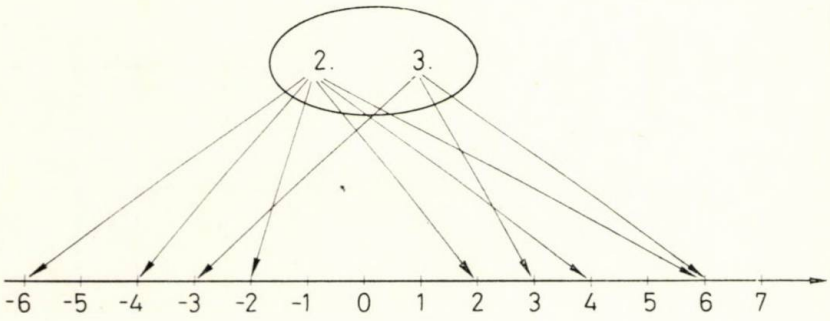
....

....

....

B. csoport

1.

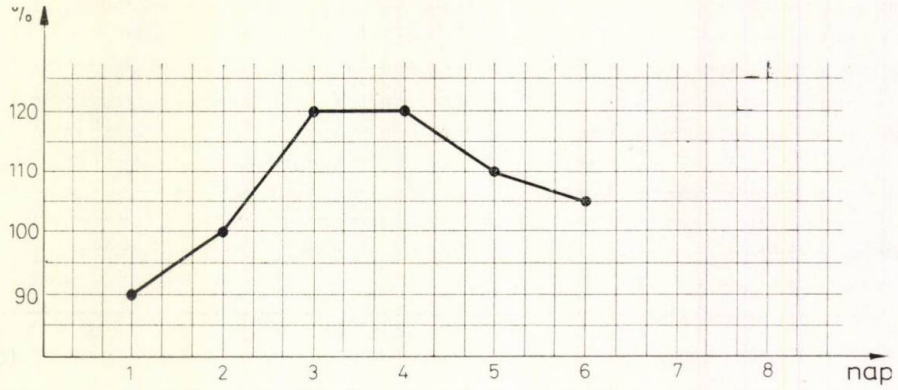


Mi a hozzárendelés egy lehetséges szabálya? .....

.....

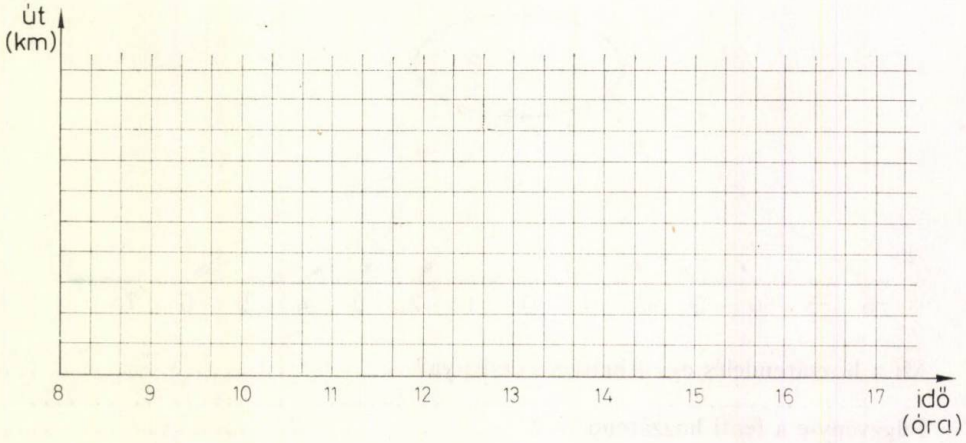
Függvény-e a fenti hozzárendelés? .....

2. Egy üzemben egy héten keresztül minden nap mérték, hogy hány százalékra teljesítették a napi normát. Ezt látjuk az alábbi grafikonon.

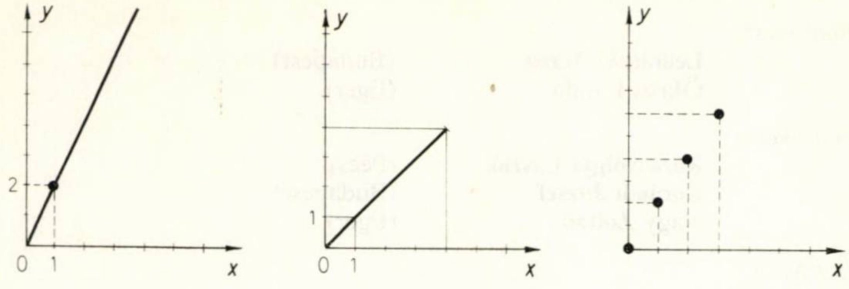


Mikor volt a legalacsonyabb a termelés? .....
Mikor volt a legmagasabb a termelés? .....
Mely napokon nőtt a termelés az előző napihoz képest? .....
.....
Mely napokon csökkent a termelés az előző napihoz képest? .....
.....
Mely napokon volt a termelés 100% alatt? .....
Mely napokon volt 100% felett? .....
Mikor volt éppen 100%? .....
Mely napokon nem változott a termelés az előző napihoz képest? .....

3. Egy gyalogos 8-kor indul a faluból a városba és 17 óra 20 perckor érkezik meg. A városból a faluba egy másik gyalogos indul 10 óra 20 perckor ugyanazon az útvonalon, és ő is 17 óra 20 perckor érkezik meg. Ábrázoljuk a mozgásukat!
Mikor és hol találkoznak? .....



4. Írjuk fel a grafikonnal adott függvények képletét és értelmezési tartományát!



....

....

....

Eredmények:

Feladatok	1.	2.	3.	4.	Összesen
A feladatokra elérhető pontszám	6	8	6	12	32
Teljesítmény %-ban	41,4	84,1	60,9	42	55,9

SEBESTYÉN JÓZSEF
főiskolai tanársegéd
Szombathely

Beszámoló a Tanárképző Főiskolák 1979. évi Országos Matematikai Tanulmányi Versenyéről

A versenyt április 23-án és 24-én a Szombathelyi Tanárképző Főiskolán rendezték, amelyen a Bessenyei György TKF (Nyíregyháza), a Ho Si Minh TKF (Eger), a Ho Si Minh TKF Kihelyezett Tagozata (Budapest), a Juhász Gyula TKF (Szeged), a Pécsi TKF és a Szombathelyi TKF öt-öt hallgatója vett részt. A Bolyai János Matematikai Társulat Elnökségének felkérése alapján a versenybizottság

elnöke:	Hódi Endre	osztályvezető, OPI
titkára:	Sebestyén József	főiskolai tanársegéd, Szombathely
tagjai:	Darvasi Gyula	főiskolai adjunktus, Nyíregyháza
	Kamarás Lajos	főiskolai docens, Pécs
	Pogáts Ferenc	főiskolai adjunktus, Budapest
	Dr. Szepessy Bálint	főiskolai docens, Eger
	Dr. Szilassi Lajos	főiskolai adjunktus, Szeged

voltak.

A kitűzött feladatok megoldására az első nap délelőttjén 5 óra állt a versenyzők rendelkezésére. Délután közös kőszegi autóbusz-kirándulás volt a program. A második napon került sor a megoldások ismertetésére és az ünnepélyes eredményhirdetés-

re. A versenybizottság 2 első, 3 második és 4 harmadik díjat adott ki; további 5 hallgatót dicséretben részesített.

I. díjat nyert:

Ledniczki Teréz	(Budapest)
Ökrös László	(Eger)

II. díjat nyert:

Rózsavölgyi László	(Pécs)
Korándi József	(Budapest)
Nagy Zoltán	(Eger)

III. díjat nyert:

Boda János	(Pécs)
Janics Zsuzsanna	(Szeged)
Mándli Ilona	(Szombathely)
Poór József	(Szombathely)

dicséretben részesült:

Likai László	(Eger)
Nagy Pál	(Pécs)
Erdélyi Gábor	(Nyíregyháza)
Nyilas József	(Nyíregyháza)
Orbán Mária	(Szombathely)

A kitűzött feladatok és megoldások

1. feladat: Hányféleképpen helyezhető el 2 piros, 5 kék és 5 zöld golyó egy ikozaéder (szabályos 20-lap) csúcsaiban, ha nem tekintünk különbözőnek olyan két elhelyezést, amelyek az ikozaéder elforgatásával egymásba vihetők át?

Megoldás:

Ha az ikozaéder csúcsait megkülönböztetjük egymástól, például egy térbeli koordináta-rendszerben helyezzük el a testet, akkor a 2 piros, 5 kék és 5 zöld golyó

$$\frac{12!}{2!5!5!} = 16\,632$$

féleképpen helyezhető el a csúcspontokban.

Ezek között az elhelyezések között azonban vannak olyanok, amelyek az ikozaéder mozgatásával egymásba vihetők. Ezért először vizsgáljuk meg az ikozaédert önmagába vivő mozgásokat!

Az ikozaédert csúcstengely, laptengely és éltengely körüli forgatással vihetjük önmagába. A csúcstengelyek száma 6, a laptengelyeké 10, az éltengelyeké pedig 15. A csúcstengely körül 4 különböző szögű (72°, 144°, 216°, illetve 288°) forgatás, a laptengely körül 2 (120°, illetve 240°), az éltengely körül pedig 1 forgatás (180°) végezhető.

Ha a helyben hagyást is figyelembe vesszük, akkor az ikozaédert önmagába vivő transzformációk száma

$$6 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 15 + 1 = 60.$$

A színezést (a golyók elhelyezését) is figyelembe véve az ikozaéder csak akkor kerülhet önmagába forgatással, ha 2 szemközti csúcsában piros, az egyikből kiinduló élek végpontjaiban kék, a másikból kiinduló élek végpontjaiban zöld golyók vannak, forgástengely pedig a piros golyókat tartalmazó csúcstengely. Jelöljük ezt az elhelyezést a $p\ [5k][5z]p$ szimbólummal!

Ugyanis a tengely körüli forgatások bizonyos ciklikus permutációkat határoznak meg. A színezést is figyelembe véve az ikozaéder csupán akkor vihető át mozgással önmagába, ha az egy cikluson belüli elemek azonos színűek.

A csúcstengely körüli forgatások 2 egyelemű és 2 ötelemű ciklusból ($1^2 5^2$), a laptengely körüli forgatások 4 háromelemű ciklusból (3^4), az éltengely körüli forgatások 6 kételemű ciklusból (2^6) állnak.

Mivel a piros golyók száma 2, ezért a laptengely körüli; továbbá a kék és a zöld golyók száma páratlan, ezért az éltengely körüli forgatásoknak nincs állandó színezésük. A csúcstengely körüli forgatások akkor viszik az ikozaédert önmagába, ha az egyelemű ciklusok pirosak, az egyik ötelemű ciklus kék, a másik pedig zöld golyókból áll. Ez a $p[5k][5z]p$ eset.

Azt kell még megvizsgálnunk, hogy az ikozaédert adott helyzetből adott színezés esetén két különböző forgatással ugyanabba a véghelyzetbe tudjuk-e hozni vagy sem. Mivel két különböző forgatás az ikozaéder minden csúcspontját nem viheti ugyanabba a véghelyzetbe, ezért ugyanaz a véghelyzet csak akkor állhat elő, ha az egyik véghelyzetet a másikba vivő forgatás, az ikozaéder színezését is figyelembe véve, az ikozaédert önmagába viszi. Láttuk azonban, hogy ez csak a $p[5k][5z]p$ esetben valósulhat meg.

Összefoglalva:

Ha a golyók elhelyezése nem azonos $p[5k][5z]p$-vel, akkor a koordináta-rendszerben elfoglalt helyzetet is figyelembe véve sem forgatással nem vihetjük a színezett ikozaédert önmagába, sem pedig 2 különböző forgatás nem eredményezheti ugyanazt a véghelyzetet. Mivel az ikozaédert önmagába vivő transzformációk száma 60, ezért ezek az elhelyezések 60-féle helyzetben lehetnek. A $p[5k][5z]p$ elhelyezés 12 féleképpen fordulhat elő. Ezek együttes száma

$$(h-1)\cdot 60+12 = 16\,632.$$

Ebből az elhelyezések száma 278.

2. feladat: Legyen egy tetszés szerinti ABC háromszög oldalainak hossza rendre: $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$; kerülete $2s$ és területe t. Jelölje az A csúcsnak B-re vonatkozó tükörképét C_1, a B csúcsnak C-re vonatkozó tükörképét A_1, míg a C csúcsnak A-ra vonatkozó tükörképét B_1. Végül legyen $AA_1=a_1$, $BB_1=b_1$, $CC_1=c_1$.

Bizonyítsuk be, hogy akkor

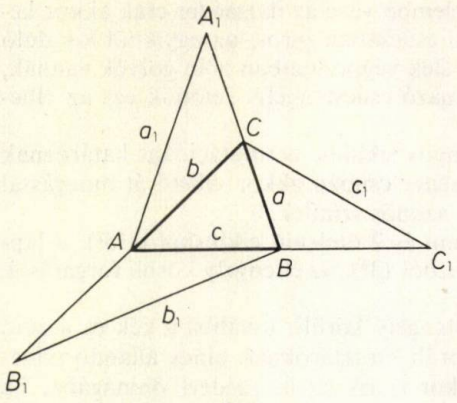
$$a_1bc+ab_1c+abc_1 \geqq 8\ \text{st}.$$

Mely esetben áll fenn egyenlőség?

Megoldás:

ABA_1 háromszög súlyvonala AC (1. ábra), ezért területe $2t$. Így

$$2t = \frac{1}{2}\cdot a_1\cdot c\cdot \sin(a_1c) \leqq \frac{1}{2}\cdot a_1c, \quad \text{azaz} \quad a_1c \geqq 4t.$$



1. ábra

Ebből

(1) $$a_1 bc \geqq 4bt.$$

Ugyanígy kapjuk a BCB_1, illetve CAC_1 háromszögből, hogy

(2) $$ab_1 c \geqq 4ct,$$

(3) $$abc_1 \geqq 4at.$$

(1), (2) és (3) összegéből $a+b+c=2s$ helyettesítéssel kapjuk az állítást.

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha az ABA_1, BCB_1, CAC_1 háromszögek derékszögűek. Ekkor viszont $a=b$, $b=c$, illetve $a=c$, mert derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó súlyvonal egyenlő az átfogó felével. Ez ABC szabályos háromszög esetén valósul meg.

3. feladat: A Fibonacci-féle sorozatban: $a_1=1$, $a_2=1$; $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$, ha $n\geqq 3$.
Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a_n+a_{n+1})\cdot(a_{n+2}+a_{n+3})}$$

sor?

Ha igen, akkor mennyi az összege?
(Nagy Ferenc hajdúböszörményi általános iskolai tanár feladata.)

Megoldás:

A sor akkor konvergens, ha a részletösszegek sorozata konvergens. Jelöljük a részletösszegek sorozatának k-adik elemét S_k-val, és írjuk fel zárt alakban:

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{(a_n+a_{n+1})\cdot(a_{n+2}+a_{n+3})} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{a_{n+2}\cdot a_{n+4}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{k} \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}\cdot a_{n+3}\cdot a_{n+4}} = \sum_{n=1}^{k} \frac{a_{n+4}-a_{n+2}}{a_{n+2}\cdot a_{n+3}\cdot a_{n+4}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{a_{n+2}\cdot a_{n+3}} - \frac{1}{a_{n+3}\cdot a_{n+4}} = \frac{1}{a_3\cdot a_4} - \frac{1}{a_{k+3}\cdot a_{k+4}} = \frac{1}{6} - \frac{1}{a_{k+3}\cdot a_{k+4}}.$$

Az a_n sorozat monoton növő, ezért a részletösszegek sorozata is monoton növő; az S_k részletösszegek sorozata felülről korlátos, tehát a sor is konvergens. A sor összege megegyezik a részletösszegek sorozatának határértékével:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a_n+a_{n+1})\cdot(a_{n+2}+a_{n+3})} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{a_{k+3}\cdot a_{k+4}}\right) = \frac{1}{6}.$$

4. feladat: Az O középpontú E ellipszis minden P pontjához hozzárendelünk egy-egy Q pontot az

$$OQ = OP+h$$

előírással, ahol h állandó hosszúságú szakaszt jelöl. A Q pontok halmaza az E ellipszissel „párhuzamos" G görbét alkotja. Ellipszis-e a G görbe vagy sem?

Megoldás:

Legyen az E ellipszis egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{ahol} \quad a \geqq b.$$

Messük el az E ellipszist és a G görbét az $y=x$ egyenletű egyenessel! Az első negyedbeli metszéspontok:

$$P\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \quad \text{illetve} \quad Q\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{h}{\sqrt{2}}; \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{h}{\sqrt{2}}\right).$$

Ha a G görbe ellipszis, akkor fél nagytengelye $a+h$, fél kistengelye pedig $b+h$. Így a G görbe az $a+h$ sugarú körből $\frac{b+h}{a+h}$ arányú merőleges affinitással származtatható. Az $a+h$ sugarú kör Q-nak megfelelő Q^* pontjára

$$Q^*\left[\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{h}{\sqrt{2}}; \quad \sqrt{(a+h)^2-\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2}\right]$$

(2. ábra), ezért a

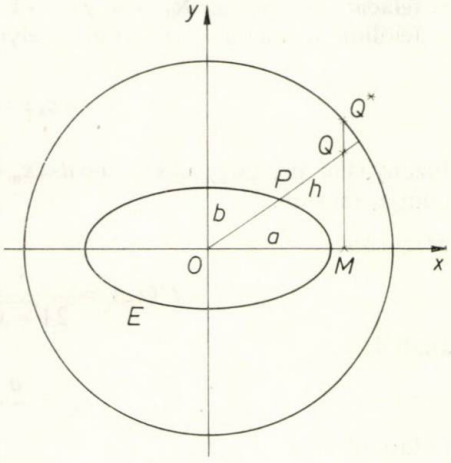
$$\frac{QM}{Q^*M}=\frac{b+h}{a+h}$$

összefüggésnek kell fennállni. Behelyettesítés és négyzetre emelés után az

$$(a+h)^2\cdot(b+h)^2$$

$$=[(a+h)^2+(b+h)^2]\cdot\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2$$

összefüggéshez jutunk. Ebből a kijelölt műveletek elvégzése és h szerinti rendezés után a következő összefüggést kapjuk:



2. ábra

$$2ab\left(a+b-\frac{a^2+b^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}-\frac{a+b}{a^2+b^2}\cdot ab\right)\cdot h+$$

(4)

$$+\left(\frac{a^2+b^2}{2}+4ab-\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}-4ab\frac{a+b}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}\right)\cdot h^2+\left(a+b-\frac{4ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}\right)\cdot h^3=0.$$

Ha $h=0$, akkor $G=E$. Ha $h\neq 0$, akkor oszthatjuk az egyenlet mindkét oldalát h-val, így h-ra nézve másodfokú egyenlethez jutunk.

Tetszőleges h esetén (4) tehát nem áll fenn, ezért a G görbe nem ellipszis.

A következőkben megmutatjuk, hogy (4) $h>0$ esetén csak akkor áll fenn, ha $a=b$, vagyis a G görbe csak akkor lesz ellipszis, ha az E kör. Ehhez azt mutatjuk meg,

hogy

$$a+b-\frac{a+b}{a^2+b^2}\cdot ab-\frac{a^2+b^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}\geqq 0, \tag{5}$$

$$\frac{a^2+b^2}{2}+4ab-\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}-4ab\frac{a+b}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}\geqq 0, \tag{6}$$

$$a+b-\frac{4ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}\geqq 0 \tag{7}$$

egyenlőtlenségek teljesülnek, és (5), (6), (7)-ben csak akkor van egyenlőség, ha $a=b$.

Ha az (5), (6), (7) egyenlőtlenségek mindegyikében átvisszük a gyökös kifejezést a jobb oldalra, akkor négyzetre emelés és rendezés után a következő összefüggéseket kapjuk:

$$(a-b)^2\cdot(a^4+b^4+2a^3b+2ab^3)\geqq 0, \tag{5*}$$

$$(a^2-b^2)^2\cdot[(a^2-b^2)^2+16ab(a^2+b^2)]+$$
$$+32\cdot a^2b^2(a^2+b^2)\cdot(a-b)^2\geqq 0, \tag{6*}$$

$$(a^2-b^2)^2+2ab(a-b)^2\geqq 0. \tag{7*}$$

Ezekből pedig leolvasható az állítás.

5. feladat: Nézzük az $R_0^- \to R$, $f: x \to \sqrt{-x}$ függvényt!

Jelöljük x_m-mel azt a számot, amelyre teljesül, hogy

$$f'(x_m)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor $a<d<x_m<b\leqq 0$, ahol d az $[a;\ b]$ intervallum felezőpontja, és $a<b$.

Megoldás:

$$f'(x_m)=\frac{1}{2\sqrt{-x_m}}=\frac{\sqrt{-b}-\sqrt{-a}}{b-a},$$

amiből

$$x_m=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{4}.$$

Induljunk ki a

$$-(\sqrt{-a}-\sqrt{-b})^2=a+2\sqrt{ab}+b<0$$

egyenlőtlenségből. Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalához hozzáadunk $(a-2\sqrt{ab}+b)$-t, és a kapott egyenlőtlenség mindkét oldalát osztjuk 4-gyel, akkor

$$\frac{a+b}{2}<\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{4} \tag{8}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Az $a<b<0$, ezért

$$\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{4}<\frac{b-2\sqrt{bb}+b}{4}=\frac{b-2(-b)+b}{4}=b,$$

vagyis

$$\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{4} < b. \tag{9}$$

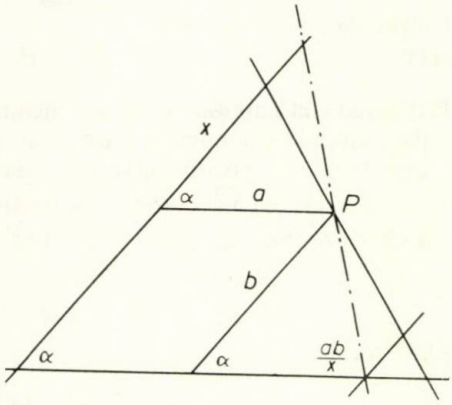
A $d=\frac{a+b}{2}>a$ figyelembevételével (8) és (9) adja az állítást.

6. feladat: Adott egy konvex triéder (háromélű testszöglet) egyik lapjának P belső pontja, valamint az erre a lapra nem illeszkedő él Q pontja.

Szerkesszük meg azt a P és Q pontokra illeszkedő síkot, amelyik a lehető legkisebb térfogatú tetraédert metszi le a testszögletből!

Megoldás:

A P és Q pontra illeszkedő síkok által lemetszett tetraédereknek közös csúcsa a Q pont, továbbá azonos a Q-hoz tartozó magasságuk. Ezért a minimális térfogatú tetraédert akkor kapjuk, ha a Q-val szemközti lap területe a legkisebb, vagyis ha a P és Q pontokra illeszkedő sík olyan egyenesben metszi a triéder P-t tartalmazó lapját, amely a triéderlapból a legkisebb területű háromszöget metszi le. A feladatban szereplő sík megszerkesztése tehát ennek az egyenesnek a megszerkesztését jelenti, és ez által az egyenes által, valamint a Q által meghatározott sík lesz a keresett sík.



3. ábra

Húzzunk párhuzamosokat a P ponton át a triéderlapot határoló élekkel (3. ábra)! Ekkor olyan paralelogrammát kapunk, amelyet a számításba jövő háromszögek mindegyike tartalmaz. A P-n átmenő egyenes hasonló háromszögeket hoz létre, amelyekben a megfelelő oldalak x és a, illetve b és $\frac{ab}{x}$.

A két háromszög területének összege

$$\frac{\sin\alpha}{2}\left(ax+\frac{ab^2}{x}\right).$$

Mivel az $ax+\frac{ab^2}{x}$ összegben a tagok szorzata a^2b^2=állandó, ezért a számtani és mértani közép összefüggése alapján az összeg akkor a legkisebb, ha a tagok egyenlők:

$$ax = \frac{ab^2}{x}.$$

Ebből $x=b$, ami azt jelenti, hogy a P pont felezi a rajta átmenő egyenest. Ezt pedig úgy szerkesztjük, hogy az egyik él P pontra vonatkozó tükörképének a másikkal való metszéspontját összekötjük a P ponttal.

7. feladat: Jelöljön n valamely természetes számot! A

$$H_n = 0+1+2+3+\ldots+n$$

számot n-edik háromszögszámnak nevezzük.

Mely n-ekre egyenlő H_n valamely természetes szám négyzetével?

Megoldás:

Ha H_n valamely y természetes szám négyzete, akkor

$$\frac{n(n+1)}{2} = y^2. \tag{10}$$

Megszorozva 8-cal az egyenlet mindkét oldalát

$$4n^2+4n = 8y^2,$$

vagyis

$$(2n+1)^2 = 8y^2+1.$$

Legyen $2n+1=x$; így a

$$x^2-8y^2 = 1 \tag{11}$$

Pell-egyenletet kapjuk. Ha az x, y nemnegatív egész számok kielégítik (11)-et, akkor x páratlan, ezért minden x, y értékpár a (10)-nek egy n, y megoldását adja.

(11) legkisebb pozitív egész megoldása $x_1=3$, $y_1=1$; összes megoldását pedig az $x_k+y_k\sqrt{8}=(3+\sqrt{8})^k$ összefüggés határozza meg.

Ekkor azonban $x_k-y_k\sqrt{8}=(3-\sqrt{8})^k$, ezért

$$x_k = \frac{1}{2}\left[(3+\sqrt{8})^k+(3-\sqrt{8})^k\right].$$

Ebből pedig

$$n_k = \frac{1}{4}\left[(3+2\sqrt{2})^k+(3-2\sqrt{2})^k-2\right].$$

Az első néhány ilyen n:
$n_0=0$, $n_1=1$, $n_2=8$, $n_3=49$, $n_4=288$, $n_5=1681$, $n_6=9800$.

DR. SURÁNYI JÁNOS
tanszékvezető egyetemi tanár
ELTE

Az „$(a+b)(a-b)$”-től az exponenciális függvényig. Egy jól ismert azonosság új alkalmazása

1. A nevezetes azonosságok közt is az egyik legismertebb az

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

összefüggés és általánosabban minden 1-nél nagyobb n egész számra az

$$a^n-b^n = (a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})(a-b)$$

azonosság. Ebből könnyen származtatható egy nagyon jól használható egyenlőtlenség.

Szorítkozzunk nemnegatív a, b számokra! Ha $a>b$, akkor a jobb oldalt csökkentjük, ha az első tényező minden tagjában a helyébe b-t írunk. A tagok száma n, ezért ha n egész és 1-nél nagyobb, a, $b\geqq 0$ és $a>b$, akkor

$$a^n-b^n > (a-b)nb^{n-1};$$

de ugyanerre az eredményre jutunk akkor is, ha $a<b$, hiszen ekkor $a-b$ negatív, tehát a jobb oldalt akkor kisebbítjük, ha a pozitív tényezőt növeljük, tehát pl. a helyébe mindenütt b-t írunk — ugyanúgy, mint az előbb. Egyenlőtlenségünk tehát érvényes marad, ha az $a>b$ feltétel helyett csak annyit teszünk fel, hogy $a\neq b$. Kicsit átalakítva a következőt nyertük:

Ha a, $b\geqq 0$, n természetes szám, akkor

$$a^n \geqq b^{n-1}(na-(n-1)b), \tag{1}$$

*és itt egyenlőség csak $n=1$, továbbá $a=b$ esetben áll fenn.**

2. Első alkalmazásként a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségre mutatok egy egyszerű bizonyítást n-ről $n+1$-re történő indukcióval, de ezen túl igen alkalmas a példa magának a teljes indukciónak a bevezetésére, lényegének, bizonyító erejének megvilágítására is.

Legyen u_1, u_2 nemnegatív, és alkalmazzuk (1)-et $n=2$, $a=(u_1+u_2)/2$, $b=u_1$ esetre:

$$\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)^2 \geqq u_1\left(2\cdot\frac{u_1+u_2}{2}-1\cdot u_1\right) = u_1u_2.$$

A két szám számtani és mértani közepe közti egyenlőtlenséget kaptuk. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

$$\frac{u_1+u_2}{2} = u_1, \quad \text{azaz} \quad u_1 = u_2.$$

Legyen most u_1, u_2, u_3 nemnegatív, és alkalmazzuk (1)-et $n=3$-ra $a=\dfrac{u_1+u_2+u_3}{3}$, $b=\dfrac{u_1+u_2}{2}$ helyettesítéssel:

$$\left(\frac{u_1+u_2+u_3}{3}\right)^3 \geqq \left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)^2\left(3\cdot\frac{u_1+u_2+u_3}{3}-2\cdot\frac{u_1+u_2}{2}\right) = \left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)^2 u_3.$$

Felhasználva a jobb oldalon az éppen bizonyított egyenlőtlenséget, kapjuk a három szám számtani és mértani közepére vonatkozó egyenlőtlenséget. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha mindkét felhasznált egyenlőtlenségben az egyenlőség esete érvényes, azaz

$$\frac{u_1+u_2+u_3}{3} = \frac{u_1+u_2}{2} \quad \text{és} \quad u_1 = u_2,$$

amiből $u_1=u_2=u_3$ adódik.

* Az egyenlőtlenség a Bernoulli-egyenlőtlenség homogén formája, és azzal ekvivalens, de alkalmazása sokkal kényelmesebb, amint ez a következőkből látható lesz. Valóban $b=1$; illetve $a=1+h$, $b=1$ helyettesítéssel az

$$a^n \geqq 1+n(a-1), \quad \text{ha} \quad a \geqq 0, \tag{2}$$

illetve

$$(1+h)^n \geqq 1+nh, \quad \text{ha} \quad h \geqq -1$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amelyek a Bernoulli-egyenlőtlenség szokásos alakjai. Fordítva, például (2)-ben a helyébe a/b-t írva visszakapjuk (1)-et.

3. Az eljárás nyilván hasonlóan folytatható tovább. Azt mondhatjuk, hogy egy bizonyító automatához jutottunk, amely bebizonyítja számunkra a két közép közti egyenlőtlenséget akárhány számra, csak hagyni kell, hogy elég sokáig dolgozzék. Persze, ha tudjuk, hogy el tud jutni az automata akárhány szám közti középig, akkor anélkül is tudjuk, hogy akárhány számra igaz az egyenlőtlenség, hogy tényleg működésbe hoznánk az automatát.

Arról kell csak meggyőződnünk, hogy valóban akármeddig tudna dolgozni az automata, tehát abból, hogy valamilyen k-ra és nemnegatív $u_1, u_2, \ldots, u_k$-ra

$$\left(\frac{u_1+u_2+\ldots+u_k}{k}\right)^k > u_1u_2\ldots u_k, \quad \text{kivéve, ha} \quad u_1=u_2=\ldots=u_k, \tag{3}$$

be tudja bizonyítani a megfelelő állítást $(k+1)$-re, akármi is k. Ez pedig nyilvánvaló. Legyen $u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}$ nemnegatív, ekkor (1)-ből az

$$n=k+1, \quad a=(u_1+\ldots+u_k+u_{k+1})/(k+1), \quad b=(u_1+\ldots+u_k)/k$$

helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{u_1+\ldots+u_k+u_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1} \geqq \left(\frac{u_1+\ldots+u_k}{k}\right)^k u_{k+1},$$

és felhasználva (3)-at

$$\left(\frac{u_1+\ldots+u_k+u_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1} \geqq u_1\ldots u_ku_{k+1}.$$

Itt akkor áll fenn egyenlőség, ha

$$\frac{u_1+\ldots+u_k+u_{k+1}}{k+1} = \frac{u_1+\ldots+u_k}{k} \quad \text{és} \quad u_1=\ldots=u_k.$$

A kettőből

$$u_{k+1} = \left(\frac{k+1}{k}-1\right)(u_1+\ldots+u_k) = u_1.$$

Automatánk tehát sohasem akadhat el, akárhány nemnegatív számra be tudja bizonyítani, hogy számtani közepük nem kisebb a mértaninál, sőt ha nem mind egyenlők a számok, akkor határozottan nagyobb a számtani közép. Az állítás így igaz akárhány számra.

4. A Bernoulli-egyenlőtlenség egyik leggyakoribb alkalmazása annak a bizonyítása, hogy az

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

sorozat minden valós x-re konvergens, és az $e(x)$ határérték eleget tesz az

$$e(x+y) = e(x)e(y) \tag{4}$$

függvényegyenletnek. Ez is igen egyszerűen adódik (1) felhasználásával.* Állításaink nyilvánvalóak, ha $x=0$, ezért feltehetjük, hogy $x\neq 0$.

* A Bernoulli-egyenlőtlenség átírását homogén alakra, ahogyan azt az előző lábjegyzetben jeleztem, és alkalmazását az $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ sorozat konvergenciájának bizonyítására Kalmár László vetette fel még a 40-es évek végén.

Legyen x tetszőleges valós szám, $n \geqq 2$ természetes szám, továbbá

$$1+\frac{x}{n-1} \geqq 0, \quad \text{azaz} \quad n \geqq -x+1 \text{ is!}$$

Helyettesítsük (1)-be a nemnegatív $a=1+\frac{x}{n}$, $b=1+\frac{x}{n-1}$ értékeket! Kapjuk, hogy

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n > \left(1+\frac{x}{n-1}\right)^{n-1}\left[n\left(1+\frac{x}{n}\right)-(n-1)\left(1+\frac{x}{n-1}\right)\right] = \left(1+\frac{x}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Az

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

sorozat tehát elég nagy n_0 értéktől kezdve monoton növekedő.

5. Megmutatjuk, hogy korlátos is a sorozat. Ehhez megmutatjuk, hogy minden x értékhez van olyan k egész, hogy az

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+k} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

sorozat monoton fogyó. Most a sorozat két szomszédos elemének reciprokát hasonlítjuk össze (1) segítségével. Legyen tehát k később meghatározandó egész! Írjunk (1)-ben n helyett $(n+1)$-et és legyen

$$a = \frac{1}{1+\frac{x}{n}} = 1-\frac{x}{n+x}, \quad b = \frac{1}{1+\frac{x}{n-1}} = 1-\frac{x}{n+x-1}.$$

Ekkor azt nyerjük, hogy ha a is, b is pozitív $(n>1-x)$, akkor

$$\frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+k}} \geqq \left(\frac{1}{\left(1+\frac{x}{n-1}\right)^{n+k-1}}\right)\left[(n+k)\left(1-\frac{x}{n+x}\right)-(n+k-1)\left(1-\frac{x}{n+x-1}\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{\left(1+\frac{x}{n-1}\right)^{n+k-1}}\right)\left(1+\frac{x(k-x)}{(n+x)(n+x-1)}\right).$$

Válasszuk k-t x-nek, ha x egész; ellenkező esetben az x előtti egésznek, például a legnagyobb egésznek, ha negatív; végül az x-et követő egésznek, például a legkisebbnek, ha x pozitív!

Ekkor minden esetben $x(k-x) \geqq 0$, és az n-re tett kikötés folytán a nevező is pozitív, ennélfogva azt nyertük, hogy

$$\frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+k}} \geqq \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n-1}\right)^{n-1+k}},$$

azaz

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+k} \leqq \left(1+\frac{x}{n-1}\right)^{n-1+k}.$$

Ilyen k választása mellett tehát a (6) sorozat elég nagy n értékektől kezdve monoton csökkenő.

Mivel k-t x-szel egyező előjelűnek választottuk, ezért

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+k}.$$

Ebből már következik, hogy az (5) sorozat felülről korlátos, és így konvergens.

6. Hátravan még a (4) összefüggés bizonyítása. A jobb oldal az

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x+y+\frac{xy}{n}}{n}\right)^n$$

szorzat határértéke. Itt $x+y+\frac{xy}{n}$ nyilvánvalóan $(x+y)$-hoz tart. Ezért (4) egyszerű következményeként adódik, ha megmutatjuk a következőt:

Ha az x_n $(n=1, 2, \ldots)$ *sorozat tart egy* x *véges határértékhez, akkor* $\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n$ *is konvergens és* $e(x)$*-hez tart* (azaz határértéke megegyezik az (5) sorozatéval).

Ez is azonnal adódik (1)-ből. Egyrészt legyen $a=1+\frac{x_n}{n}$, $b=1+\frac{x}{n-1}$, másrészt írjunk n helyébe $(n+1)$-et és legyen $a=1+\frac{x}{n+1}$, $b=1+\frac{x_n}{n}$. Ekkor a következőket kapjuk: egyrészt

$$\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n > \left(1+\frac{x}{n-1}\right)^{n-1}\left[n\left(1+\frac{x_n}{n}\right)-(n-1)\left(1+\frac{x}{n-1}\right)\right] =$$

$$= \left(1+\frac{x}{n-1}\right)^{n-1}(1+x_n-x),$$

másrészt

$$\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n\left[(n+1)\left(1+\frac{x}{n+1}\right)-n\left(1+\frac{x_n}{n}\right)\right] = \left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n(1+x-x_n).$$

Mivel $x_n \to x$, ezért n_0 úgy választható, hogy ha $n>n_0$, akkor $|x_n-x|<1$. Ez esetben

$$(1+x_n-x)\left(1+\frac{x}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n < \frac{1}{1+x-x_n}\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Itt a két szélső sorozat egyaránt $e(x)$-hez tart, ha n minden határon túl nő, ennélfogva a közbülső sorozat is konvergens és ugyanehhez a határértékhez tart. Ezzel bizonyítottuk állításunkat és vele együtt a (4) azonosságot is.

Ezekből már az ismert módon következik, hogy $e(x)$ az $e(1)=e$ alapú exponenciális függvény. Úgy gondolom, hogy az itt röviden vázolt tárgyalás igen alkalmas szakköri feldolgozásra.

7. Az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat az új tantervben is említésre kerül, a fakultatív órák anyagában. Ha korábban sort kerítettünk az (1) egyenlőtlenségre, akkor könnyűszerrel

adódik a sorozat monotonitása, és ha hozzávesszük az $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ sorozatot is, akkor

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n<1,$$

azaz

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$$

egyenlőtlenség felhasználásával a sorozat korlátos, ennélfogva konvergens volta is.

FELADATOK

Rovatvezető: Reményi Gusztáv

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Villányi út 74., IV. 23., 1113. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: a lap kézbesítésétől számított 20. nap.

921. Írjuk fel zárt alakban az

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}(3i-1)^2$$

összeget!

Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény

922. Az (x_n) és az (y_n) sorozatot a következő módon definiáljuk:

$$x_n=\begin{cases}1, & \text{ha } n=1,\\ 3x_{n-1}+4y_{n-1}+1, & \text{ha } n>1,\end{cases}$$

$$y_n=\begin{cases}1, & \text{ha } n=1,\\ 2x_{n-1}+3y_{n-1}+1, & \text{ha } n>1.\end{cases}$$

Igazoljuk, hogy az $(x_n^2+x_n+1)$ sorozat elemei páratlan számok, az (y_n^2) sorozat elemei pedig trianguláris számok.

Bencze Mihály, Brassó

923. Jelöljük a kanonikus alakú $z=x+iy$ komplex szám valós és képzetes részének összegét $B(z)$-vel:

$$B(z)=x+y.$$

Bizonyítsuk be, hogy ha x és y egész szám, k pedig természetes szám, akkor érvényes a

$$B(z)\mid B(z^{4k+1})$$

reláció.

Surányi János, Budapest—Várnai Ferenc, Miskolc

924. Egy 45 kőből álló 0, 1, 2, ..., 8 pontos dominókészletből találomra kiválasztunk két követ. Mi a valószínűsége annak, hogy ezeket az ismert játékszabály szerint egymás mellé lehet illeszteni? Mekkora ez a valószínűség, ha egy kő hiányzik a készletből?

Bakos Tibor, Budapest

925. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög bármelyik oldalegyenesén a beírt kör érintési pontja, az oldalt érintő hozzáírt kör érintési pontja, a magasságtalppont és a belső szögfelező metszéspontja — amennyiben különböznek egymástól — harmonikus pontnégyest alkotnak.

Fitos László, Nyíregyháza

926. Szerkesszük meg az $ABCD$ ($AB||CD$) trapézt, ha adottak a szárai, továbbá a $BAC\sphericalangle$, $ABD\sphericalangle$ szögek!

Deák Tibor, Budapest

Feladatmegoldások (909—914.)

909. Oldjuk meg a

$$2a^4+2a^2-1 \geqq \frac{3}{2}(a^2+a-1) \tag{1}$$

egyenlőtlenséget!

Megoldás: Az adott egyenlőtlenség ekvivalens a

$$4a^4+a^2-3a+1 \geqq 0 \tag{2}$$

egyenlőtlenséggel. A (2) bal oldalán álló polinomot alakítsuk szorzattá! Minthogy a polinom egész együtthatós, ezért megkereshetjük a racionális gyökeit. Tegyük fel, hogy a $\frac{p}{q}$ gyöke a polinom függvénynek, ahol $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{P}$ ($\mathbf{Z}$ az egész, $\mathbf{P}$ a pozitív egész számok halmaza), és $(p, q)=1$. Akkor az ismert módon azt kapjuk, hogy igaz a $p|1 \wedge q|4$ konjunkció, azaz a lehetséges racionális gyökök ± 1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$. Ezek közül az $\frac{1}{2}$ gyöknek bizonyul, ezért — ismert tétel értelmében — az $a-\frac{1}{2}$ gyöktényező kiemelhető a polinomból:

$$\left(a-\frac{1}{2}\right)2(2a^3+a^2+a-1) \geqq 0. \tag{3}$$

A kapott harmadfokú polinomfüggvényre az előbbi eljárás azt adja, hogy $\frac{1}{2}$ ismét gyök. Belőle is kiemelve $\left(a-\frac{1}{2}\right)$-et, az (1)-gyel ekvivalens

$$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2(a^2+a+1) \geqq 0 \tag{4}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Az első tényező mindig nem negatív értékű, és a második tényező $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ alakjából látszik, hogy azonosan pozitív, tehát (4), és vele (1) is minden valós számra teljesülő azonos egyenlőtlenség, ahol egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a=\frac{1}{2}$.

Bogdán Zoltán, Cegléd és Németh László, Vasvár

Megjegyzés: Több megoldó az „azonos átalakítás" kifejezést akkor is használja, amikor az helytelen. Akkor és csak akkor mondjuk, hogy az $f \equiv g$ (f és g függvényeket jelentenek ugyanazon változókkal) egyenlőtlenségen azonos átalakítást hajtunk végre, ha a felírt új $f_1 \equiv g_1$ egyenlőtlenségben $f=f_1$ és $g=g_1$ (itt függvények egyenlőségéről van szó!).

A megoldók száma: 38.

910. Mutassuk meg, hogy az

$$y^2 = x^4+2x^3-2x-1 \tag{1}$$

egyenletnek végtelen sok racionális megoldása van!

I. megoldás: Az (1) jobb oldalát szorzattá alakíthatjuk:

$$y^2 = (x^2-1)(x+1)^2. \tag{2}$$

Keressünk olyan racionális x-et, amelyre x^2-1 racionális számnak, z-nek négyzete, azaz keressünk racionális (x, z) megoldásokat az

$$x^2-1 = z^2, \text{ illetve az } (x+z)(x-z) = 1 \tag{3), (4)}$$

egyenletre. Megpróbáljuk ugyanazzal a paraméterrel előállítani a két ismeretlent. Ha x és z a (4)-et kielégítő racionális számok, akkor $x+z$ is, $x-z$ is 0-tól különbözők, és teljesül az

$$x+z = \frac{1}{x-z}$$

egyenlet is. A bal és jobb oldal közös (nem nulla) racionális értékét r-rel jelölve az

$$x+z = r$$

$$x-z = \frac{1}{r}$$

egyenletrendszerből az

$$x = \frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right), \quad z = \frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right) \tag{5}$$

értékekhez jutunk.

Megfordítva, tetszőleges 0-tól különböző r racionális számmal állítsuk elő az (5) alatti egyenletekkel meghatározott x és z racionális számokat, ezek kielégítik (3)-at. Vegyük y-nak $z(x+1)$ értékét, akkor az

$$\left(\frac{r^2+1}{2r}; \quad \frac{(r^2-1)(r+1)^2}{4r^2}\right) \tag{6}$$

racionális számokból álló számpár első elemére $1<r_1<r_2$ mellett könnyű kimutatni

$$\frac{r_1^2+1}{2r_1} < \frac{r_2^2+1}{2r_2} \tag{7}$$

érvényességét. Behelyettesítés mutatja, hogy (6) kielégíti (2)-t, és (7) alapján biztos, hogy (6) végtelen sok különböző megoldást ad, ha r 1-nél nagyobb értékekkel tetszőleges szigorúan növekvő sorozaton fut végig.

Szabó Jánosné, Békéscsaba és Sugár György, Budapest

II. megoldás: Keressünk (3)-ra racionális megoldásokat. Egész megoldása csak kettő van: az $(1; 0)$ és a $(-1; 0)$ számpár. Vezessünk be új változókat az $x=\frac{a}{c}$, $z=\frac{b}{c}$ helyettesítésekkel, ahol $a, b \in \mathbf{Z}$, $c \in \mathbf{P}$. Ezekkel a (3)-ból az

$$a^2 = b^2+c^2 \tag{8}$$

egyenlethez jutunk. Ismert tétel, hogy a (8)-at végtelen sok, páronként relatív prím pozitív egész számhármas kielégíti. Ezek mindegyikéből felírva az $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}$ redukált törtekből álló számpárt a (3) egyenlet

racionális megoldásait kapjuk, mégpedig csupa különbözőt, hiszen más számhármasra áttérve legalább két szám megváltozik.

Gaál László, Sepsiszentgyörgy és Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

Megjegyzés: Hasonlóan be lehet bizonyítani, hogy az

$$y^2 = x^4+2(2c-b)x^3+(6c^2-6bc+b^2-a^2)x^2+2c(2c^2-3bc+b^2-a^2)x+c^4-2bc^3+(b^2-a^2)c^2$$

egyenletnek végtelen sok racionális $(x; y)$ megoldása van, ahol $a, b, c \in \mathbf{Z}$. Az $a=b=c=1$ speciális eset az (1) egyenlet.

Bencze Mihály, Brassó

A megoldók száma: 35.

911. Bizonyítsuk be, hogy teljesül a

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a^2-b^2x_i^2} \leqq \sqrt{a^2n^2-\left(b\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{1}$$

egyenlőtlenség, ha fennállnak az $a^2-b^2x_i^2 \geqq 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ egyenlőtlenségek!

Bartha Gábor, Szentendre

I. megoldás: Az (1) bal oldala nem negatív számok n tagú összege. Állítsuk elő a számtani közepüket azáltal, hogy mindkét oldalt szorozzuk meg $\frac{1}{n}$-nel $(n \in \mathbf{P})$! A kapott

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a^2-b^2x_i^2} \leqq \frac{1}{n}\sqrt{a^2n^2-\left(b\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{2}$$

egyenlőtlenség ekvivalens az eredetivel. Alkalmazzuk a számtani és kvadratikus középre vonatkozó ismert azonos egyenlőtlenséget. Ennek alapján igaz, hogy

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a^2-b^2x_i^2} \leqq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(a^2-b^2x_i^2)}{n}}. \tag{3}$$

A (3) jobb oldalán álló tört számlálója nem negatív, hiszen nem negatív számok összege. A (3) jobb oldala azonosan egyenlő az

$$\frac{1}{n}\sqrt{a^2n^2-nb^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

kifejezéssel. Ha sikerülne bizonyítani, hogy

$$\frac{1}{n}\sqrt{a^2n^2-nb^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leqq \frac{1}{n}\sqrt{a^2n^2-\left(b\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{4}$$

teljesül, akkor ezzel (1) igazolva volna. Nem tudjuk, hogy (4) jobb oldalán a gyökjel alatti szám milyen előjelű. Próbáljuk meg kimutatni, hogy a nem negatív kivonandókra

$$nb^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqq b^2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \tag{5}$$

érvényes. Ha (5)-öt sikerül belátni, akkor, minthogy a (3)-ból tudjuk, hogy $a^2n^2 \geqq nb^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ igaz, biztosan fennáll $a^2n^2 \geqq \left(b\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$ is és akkor a (4) is, mert a nem negatív a^2n^2-ből kisebb nem negatívot, illetve nem nagyobbat vonunk ki.

Ha $b=0$, akkor (5) triviálisan teljesül; ha $b \neq 0$, akkor

$$n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \tag{6}$$

az (5)-tel ekvivalens. A (6)-tal ekvivalensek ezek:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2 \leqq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}, \quad \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|}{n} \leqq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}. \tag{7), (8)}$$

Ismeretes, hogy

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leqq \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \tag{9}$$

továbbá, hogy nem negatív a_i számokra

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \leqq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n}} \tag{10}$$

érvényes. A (9) oldalait $\frac{1}{n}$-nel megszorozva és (10)-et alkalmazva éppen (8)-at kapjuk. Ezzel (5)-öt, illetve (1)-et is igazoltuk.

Csorba Ferenc, Győr, Hoffer János, Budapest és Imolya Sándor, Hódmezővásárhely

II. megoldás: Ismeretes, hogy minden a_i, b_i ($i=1, 2, \ldots, n$) valós számra teljesül az

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 \leqq (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2) \tag{11}$$

egyenlőtlenség (Cauchy—Bunyakovszkij—Schwarz).

Alkalmazzuk (11)-et az $a_i=\sqrt{a^2-b^2x_i^2}$, $b_i=1$ értékekre:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a^2-b^2x_i^2}\right)^2 \leqq n\sum_{i=1}^{n}(a^2-b^2x_i^2) = a^2n^2-nb^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2. \tag{12}$$

Az utolsó kifejezésben $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ helyébe $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$-et kellene behozni, hogy az (1)-hez közelebb jussunk, mégpedig csökkentéssel (nem növeléssel). Alkalmazzuk újból (11)-et az $a_i=x_i$, $b_i=1$ értékekre:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqq n\sum_{i=1}^{n} x_i^2. \tag{13}$$

A (12) szerint $a^2n^2 \geqq 0$, $a^2n^2-nb^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqq 0$ érvényesek, ha tehát a nem negatív kivonandó helyett (13) bal oldalának b^2-szeresét írjuk, amely szintén nem negatív, akkor növeltünk, illetve nem csökkentettünk, azaz fennáll a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a^2-b^2x_i^2}\right)^2 \leqq a^2n^2-b^2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \tag{14}$$

egyenlőtlenség. Minthogy (14) bal oldala nem negatív, ezért a jobb oldala is ilyen, ebből következően a négyzetgyökeik közt ugyanaz a reláció igaz. Végül a bal oldalon a $\sqrt{u^2}=|u|$ azonosságot alkalmazva (1)-hez jutunk.

Nagy Béla, Sarkad és Nyirő László, Mezőkövesd

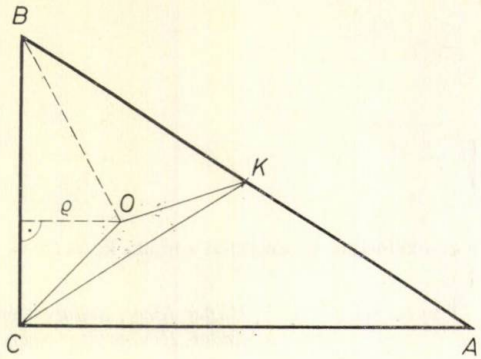
Megjegyzés: Több megoldó megjegyzés nélkül alkalmazta a $\sqrt{(a+bx_i)(a-bx_i)}=\sqrt{a+bx_i}\cdot\sqrt{a-bx_i}$ azonosságot, holott az $a^2-b^2x_i^2 \geqq 0$ feltevésből nem következik, hogy a jobb oldali négyzetgyökök értelmezve vannak.

A megoldók száma: 24.

912. Az AB átfogójú ABC derékszögű háromszög beírt körének sugara ϱ, középpontja O, és az átfogó felezőpontja K. A COK háromszög területe akkora, mint a $2py=x^2$ egyenletű parabola azon három pontja által meghatározott háromszög területe, amelyeknek abszcisszája az ABC háromszög oldalainak hossza. Mekkora a parabola p paramétere?

Kőváry Károly, Budapest

Megoldás: Tegyük fel, hogy egy derékszögű háromszög kielégíti a feladat feltételeit. Akkor a CO és CK egyenesek különbözők (különben nem léteznék a $COK_\triangle$), ebből következően CK a $C\sphericalangle$-et két különböző nagyságú szögre vágja szét. Az ábra jelöléseivel $A\sphericalangle < B\sphericalangle$, és ebből $a<b$ fennállása következik.



A $COK_\triangle$ területét megkaphatjuk a következő módon:

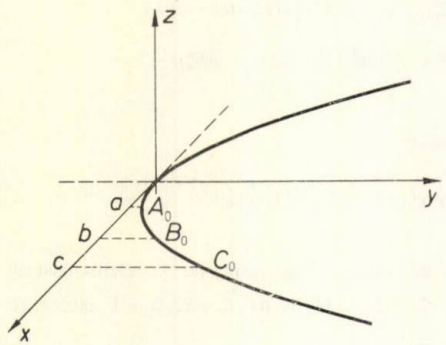
$$(1)\qquad t_{CKO_\triangle} = t_{BCK_\triangle} - t_{BCO_\triangle} - t_{BKO_\triangle} =$$

$$= \frac{1}{4}ab - \frac{1}{2}a\varrho - \frac{1}{4}c\varrho = \frac{1}{4}(ab - 2a\varrho - c\varrho) =$$

$$= \frac{1}{4}(2\varrho s - 2a\varrho - c\varrho) = \frac{\varrho}{4}(b-a)$$

(felhasználtuk a $t = \varrho \cdot s$ összefüggést).

A $2py = x^2$ parabola a, b, c abszcisszájú pontjai térbeli derékszögű koordináta-rendszerben legyenek A_0, B_0, C_0 (lásd az ábrát). Az ezek által meghatározott háromszög területe:



$$t_0 = \frac{1}{2}|\overrightarrow{A_0B_0} \times \overrightarrow{A_0C_0}| =$$

$$(2)\qquad = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b-a & \frac{1}{2p}(b^2-a^2) & 0 \\ c-a & \frac{1}{2p}(c^2-a^2) & 0 \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2p}(b-a)(c-a)(c-b).$$

A feltételek szerint az (1) és a (2) alatti területek egyenlők. Az ezekkel felírt egyenletből p-re a

$$(3)\qquad p = \frac{(c-a)(c-b)}{\varrho}$$

értéket kapjuk. Mivel a feladat szövege csak ϱ-t említi paraméterként, próbáljuk meg a (3) jobb oldalát úgy átalakítani, hogy a számlálóban is fellépjen a ϱ:

$$(c-a)(c-b) = c^2 - ac - bc + ab = ab - c(a+b-c) = 2t - c\cdot 2\varrho = 2(\varrho s - c\varrho) = 2\varrho(s-c) = 2\varrho^2$$

(felhasználtuk, hogy derékszögű háromszögben $s - c = \varrho$).

Ezzel a feladat kérdésére a következő választ nyertük: ha létezik a feltételeknek megfelelő derékszögű háromszög, akkor az nem egyenlő szárú és $p = 2\varrho$.

Az a tény, hogy a háromszög adataiból csak a ϱ maradt meg, azt sejteti, hogy a két terület $p = 2\varrho$-val minden olyan nem egyenlő szárú derékszögű háromszögre megegyezik, amelynek beírt köre ϱ sugarú.

A sejtés igazolásául gondoljuk meg, hogy ha a ϱ sugarú kör köré írt nem egyenlő szárú derékszögű háromszögben $a < b$, akkor a $COK_\triangle$ területe (1) alapján $\frac{\varrho}{4}(b-a)$. A $4\varrho y = x^2$ parabola a, b, c abszcisszájú pontjai által meghatározott háromszög területe (2) szerint:

$$\frac{1}{8\varrho}(b-a)(c-a)(c-b) = \frac{\varrho}{4}(b-a)\frac{(c-a)(c-b)}{2\varrho^2}.$$

A (4) alattiak értelmében azonban $\frac{(c-a)(c-b)}{2\varrho^2} = 1$ igaz, és ez valóban azt adja, hogy a feladat szerinti két háromszög területe egyenlő.

Az $a = b$ esetben mindkét háromszög szakaszsá fajul, amelyek területe 0, ezért a feladat területekről szóló állítása akkor is igaz, ha a szövegben "COK, illetve $A_0B_0C_0$ háromszög" helyett ez áll: "COK, illetve $A_0B_0C_0$ — esetleg elfajuló — háromszög".

A megoldók száma: 14.

913. Egy tetraéder alapélei 21 cm, 17 cm és 10 cm hosszúak, továbbá bármely két szemközti élének összege 30 cm. Mekkora a tetraéder élérintő gömbjének sugara?

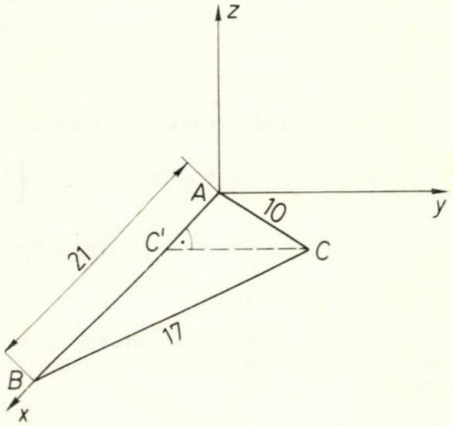
Fitos László, Nyíregyháza

Megoldás: Ismert tétel, hogy ha a tetraéder szemközti éleinek összege mindhárom élpárra ugyanakkora, akkor a tetraédernek van élérintő gömbje (lásd például Horvay—Reiman: Geometriai feladatgyűjtemény I. kötet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1970. 1956. feladat).

A kitűzött feladatban mindjárt az is probléma, hogy létezik-e olyan tetraéder, amelynek szemközti élpárjai (21; 9), (17; 13), (10; 20). (Ha a 30-at, a szemközti élek állandó összegét például így osztanánk szét: (1; 29), (1; 29), (28; 2), akkor nyilvánvalóan nem volna ilyen tetraéder.)

A feladatot koordináta-geometriai módszerrel oldjuk meg, eközben a tetraéder létezését is vizsgálni fogjuk.

Helyezzük el az adott, $10+17>21$ miatt biztosan létező alaplapot térbeli derékszögű koordinátarendszerben az xy síkon az ábra szerint. A cosinustétel alapján $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, ezekből $AC'=AC\cdot\cos\alpha=6$(cm), $CC'=AC\cdot\sin\alpha=8$(cm) adódik, tehát C koordinátái (6; 8; 0).



Keresünk olyan D pontot, amelynek távolsága az A, B, C pontoktól rendre 13, 20, illetve 9 cm. Az A, B, illetve C középpontú adott sugarú gömbök az

$$x^2+y^2+z^2 = 13^2$$

$$(x-21)^2+y^2+z^2 = 20^2$$

$$(x-6)^2+(y-8)^2+z^2 = 9^2$$

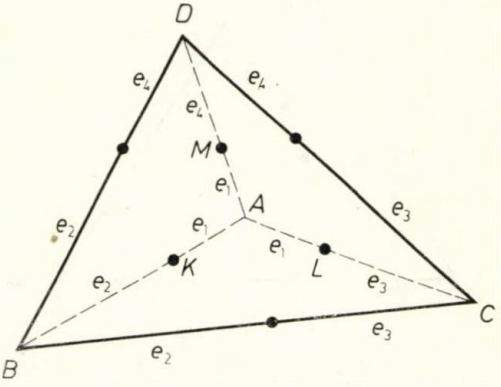
egyenletrendszert adják, ennek két megoldása van: $(5; 8; 4\sqrt{5})$, $(5; 8; -4\sqrt{5})$. Tehát két tetraéder létezik, de ezek tükörképei egymásnak az xy síkra vonatkozólag. Vegyük D-nek az $(5; 8; 4\sqrt{5})$ pontot.

Az éleket érintő gömb érintési pontjai úgy osztják ketté az éleket, hogy mindegyik csúcsból 3—3 egyenlő hosszú érintőszakasz megy a gömbhöz.
Jelöljük ezeket az ábra szerint. Az

$$e_1+e_2 = 21 \quad e_1+e_4 = 13 \quad e_2+e_4 = 20$$

$$e_1+e_3 = 10 \quad e_2+e_3 = 17 \quad e_3+e_4 = 9$$

egyenletrendszer megoldása: $e_1=7$, $e_2=14$, $e_3=3$, $e_4=6$(cm).



A keresett gömbközéppont benne van a K-n átmenő AB-re merőleges, az L-en átmenő AC-re merőleges és az M-en átmenő AD-re merőleges síkban. A K, L, M pont helyvektora:

$$\mathbf{k} = \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\mathbf{b} = (7;\ 0;\ 0),$$

$$\mathbf{l} = \overrightarrow{AL} = 0{,}7\,\mathbf{c} = (4{,}2;\ 5{,}6;\ 0),$$

$$\mathbf{m} = \overrightarrow{AM} = \frac{7}{13}\mathbf{d} = \left(\frac{35}{13};\ \frac{56}{13};\ \frac{28\sqrt{5}}{13}\right);$$

az említett síkok egy-egy egyenlete:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{k})\mathbf{b} = 0,$$

(1)

$$(\mathbf{r}-\mathbf{l})\mathbf{c} = 0,$$

$$(\mathbf{r}-\mathbf{m})\mathbf{d} = 0$$

(a pontok helyvektorait a megfelelő kisbetűkkel jelöltük). Az (1) egyenletrendszer koordinátás alakja (az $\mathbf{r}(x, y, z)$ jelöléssel):

$$(x-7;\ y;\ z)(21;\ 0;\ 0) = 0,$$

$$(x-4{,}2;\ y-5{,}6;\ z)(6;\ 8;\ 0) = 0,$$

$$\left(x-\frac{35}{13};\ y-\frac{56}{13};\ z-\frac{28\sqrt{5}}{13}\right)(5;\ 8;\ 4\sqrt{5}) = 0,$$

illetve

$$x-7 = 0,$$

(2) $$3x+4y-35 = 0,$$

$$5x+8y+4\sqrt{5}z-91 = 0.$$

A (2)-nek, azaz (1)-nek is egy megoldása van: a $\left(7;\ \frac{7}{2};\ \frac{7}{\sqrt{5}}\right)$ számhármas.

Tehát az élérintő gömb középpontja az $O\left(7;\ \frac{7}{2};\ \frac{7}{\sqrt{5}}\right)$ pont, sugara pedig:

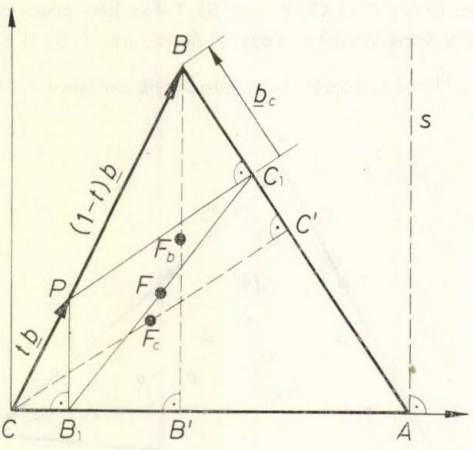
$$|\overrightarrow{OK}| = 2{,}1\cdot\sqrt{5}\,\text{cm} = 4{,}696\,\text{cm}.$$

Bartha Gábor, Szentendre

A megoldók száma: 8.

914. Adott hegyesszögű háromszög egyik oldalának tetszőleges P pontját vetítsük a másik két oldalra. Mi a vetületeket összekötő szakasz felezőpontjainak halmaza, ha P végigfut a háromszögvonalon?

Dr. Szikszai József, Miskolc



Megoldás: Helyezzük el a háromszöget derékszögű koordináta-rendszerben az ábra szerint. A pontok helyvektorait a megfelelő kis betűkkel jelöljük. Ha az A csúcs az x tengely pozitív felének belső pontja, és a B csúcs az AC szakasz Thalész-körén kívül van az AC szakasz fölött, az y tengely és az s egyenes között, akkor a háromszög hegyesszögű.

Fusson végig a P pont a CB oldalon a $\mathbf{b}$ vektor irányában. Ha P belső pont, akkor a másik két oldalra eső vetületei (megállapodás szerint a „vetítés" a leggyakrabban használt „merőleges vetítés" rövidítése!) B_1 és C_1, a B_1C_1 szakasz felezőpontja F. Ha $P \equiv C$, akkor a vetületei C és C', a felezőpont F_c; ha $P \equiv B$, akkor a vetületei B és B', a felezőpont F_b. Néhány belső P pontot felvéve úgy látszik, hogy az F pontok az F_cF_b szakaszra illeszkednek, mégpedig úgy, hogy F ugyanolyan arányban osztja az F_cF_b szakaszt, mint a P a CB szakaszt. A bizonyítást erre a gondolatra építjük.

Legyen $\mathbf{p} = t\cdot\mathbf{b}$, ahol $0 \leqq t \leqq 1$. A párhuzamos szelők tételét alkalmazva a γ, majd a β szögre a B_1 és C_1 helyvektorából előállítjuk az F helyvektorát:

$$\mathbf{b}_1 = t\mathbf{b}', \quad \overrightarrow{PB} = (1-t)\mathbf{b}, \quad \overrightarrow{C_1B} = (1-t)\mathbf{b}_c,$$

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}+\overrightarrow{BC_1} = \mathbf{b}-(1-t)\mathbf{b}_c,$$

(1) $$\mathbf{f} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_1+\mathbf{c}_1) = \frac{1}{2}(t\cdot\mathbf{b}'+\mathbf{b}-(1-t)\mathbf{b}_c) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{b}-\mathbf{b}_c+t(\mathbf{b}'+\mathbf{b}_c)\right) = \mathbf{f}_c+\frac{1}{2}(\mathbf{b}'+\mathbf{b}_c)t.$$

Most megnézzük, hogy melyik pontba jutunk, ha $\mathbf{f}_c$-hez hozzáadjuk a $t \cdot \overrightarrow{F_cF_b}$ vektort:

$$\mathbf{f}_b = \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{b}'),$$

$$\text{(2)} \qquad \mathbf{f}_c + t \cdot \overrightarrow{F_cF_b} = \mathbf{f}_c + (\mathbf{f}_b - \mathbf{f}_c)t = \mathbf{f}_c + \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{b}'-\mathbf{b}+\mathbf{b}_c)t = \mathbf{f}_c + \frac{1}{2}(\mathbf{b}'+\mathbf{b}_c)t.$$

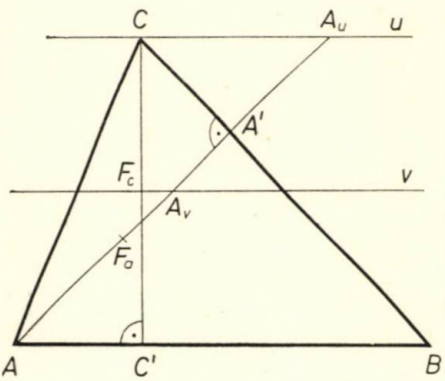
A (2)-t az (1)-gyel összevetve látjuk, hogy mindig az F pontba jutunk. Ezzel a sejtést igazoltuk.

Jogosan beszéltünk végig F_cF_b szakaszról. Ha ugyanis ponttá fajulna, akkor a $BCB'C'$ négyszög átlói feleznék egymást, azaz paralelogramma volna, de ez lehetetlen. Abból is látszik, hogy F_cF_b nem fajul el, hogy $\overrightarrow{F_cF_b} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}'+\mathbf{b}_c)$ igaz, és hegyesszögű háromszögnél $\mathbf{b}'+\mathbf{b}_c$ nem nullvektor.

Minthogy minden hegyesszögű háromszög akármelyik oldalát azonosíthatjuk a CB szakasszal, eredményünk azt mondja, hogy a keresett ponthalmaz az az esetleg elfajuló háromszögvonal, amelynek csúcsai a magasságszakaszok felezőpontjai.

Nézzük meg még, hogy az F_a, F_b, F_c ponthármas eshet-e egy egyenesre! Húzzunk párhuzamost például a C és az F_c ponton át AB-vel (az ábrán u, illetve v). Az AA' egyenes metszi u-t A_u-ban, a v-t A_v-ben úgy, hogy A' az A és A_u között van, és az AA_u szakasz felezőpontja A_v. Ebből következik, hogy F_a a v és az AB egyenes közötti sáv belsejében van. Ugyanez érvényes F_b-re is, tehát hegyesszögű háromszögnél az F_a, F_b, F_c pontok mindig háromszög csúcsai.

Kimutattuk, hogy a keresett ponthalmaz az $F_aF_bF_c$ háromszögvonal.



Deák Imre, Székelyudvarhely, Kondor Judit, Budapest és Polcz Katalin, Pécs

Elemi megoldást adott a feladatra Kacsó Ferenc és Sugár György.

A megoldók száma: 15.

A megoldók névsora (909—914.)

Bartha Gábor, Szentendre (909—914.); Bencze Mihály, Brassó (910., 911.); Bogdán Zoltán, Cegléd (909. két mód, 910—914.); Csányi Péter, Nagykőrös (909., 910.); Csorba Ferenc, Győr (909—913.); Csúri József, Szeged (909—911.); Deák Imre, Székelyudvarhely (909., 914.); Filetóth István, Nyíregyháza (909., 910.); Gaál László, Sepsiszentgyörgy (909—911., 914.); Görbe Mária, Budapest (910.); Halász Ferencné, Budapest, (909., 912.); Hárspatakiné Dékány Veronika, Budapest (909., 910.); Hazag Tibor, Budapest (909—911.); Hoffer János, Budapest (909—911).; Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (909—911., 913.); Kacsó Ferenc, Marosvásárhely (909—914.); Kelemen Lajos, Kisvárda (909., 910.); Kiss Margit, Pécel (909., 910.); Kishalmi Rózsa, Hódmezővásárhely (909—912.); Kondor Judit, Budapest (909., 912., 914.); Kotek Lászlóné, Pécs (912.); Kovács Zoltán, Szádalmás (910.); Kun Péter, Szentendre (909—911.); dr. Major Pál, Budapest (909.); Makora Tibor, Szatmár (909., 910., 914.); Molnár József, Szombathely (909., 910.); Nagy Béla, Sarkad (909—912., 914.); Németh László, Vasvár (909—913.); Nyirő László, Mezőkövesd (910., 911., 914.); Polcz Katalin, Pécs (909—914.); Schutzbach Mártonné, Siófok (909., 911.); Simon Béla, Nyíregyháza (909., 910.); Sugár György, Budapest (909—912., 914.); Szabó Jánosné, Békéscsaba (909., 910., 912.); Szabó Kálmán, Miskolc (909. két mód, 910. két mód, 911.); Szabó Zsófia, Békéscsaba (909., 910., 914.); Szánthó Gyula, Gyula (909—912., 914.); Szigeti Béláné. Győr (911.); Tóth Ferenc, Szeged (909.); Tóth János, Érsekújvár (909., 910., 911. két mód); Vermes Miklós, Budapest (909., 910., 914.); Vigassy Lajos, Budapest (909., 910.); Zalán Péterné, Budapest (909., 911., 913., 914.); Zsidó György, Kolozsvár (909—911.).

4,50 Ft

Javasolt szakirodalom

a Tankönyvkiadó kiadványai közül

	Fűzve
Dr. Kőhegyiné—Vajda: *Egyéni matematikatanulás osztályközösségben.* Feladatgyűjtemény tanárok számára az általános iskola 8. osztályának matematikaoktatásához (52 681)	16,—
Czapáry—Virág: *Tanári segédkönyv a matematika tanításához a szakközépiskolák IV. osztályában* (92 363)	20,—
Hámori: *Ismerkedés a komputerrel.* Számítástechnika I. az általános és középiskolai tanulók számára (29 205)	10,—
Kovács Gy.: *Számítógépek technikája.* Számítástechnika III. (29 217)	15,50
Középiskolai matematikai versenyek VI.—VII. kötet (29 188/VI.—VII.)	16,50
Cser—Pálfy: *Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 6. osztályos anyagának tanításához* (91 480)	24,—
Élő matematika 1. Tanulmányok. Szerkesztő: Gádor Endréné (92 347/1)	18,—
Jánossy—Tasnádi: *Élő matematika 2. Valószínűségszámítás* (92 347/2)	6,—
Gergely—Hódi és mások: *Élő matematika 3. A lánctörtektől a számítógépig* (92 347/3)	13,—
Korányi: *Élő matematika 4. Használjuk a differenciálszámítást!* (92 347/4)	18,50
Kovács M.: *Néhány kibernetikai játékgép.* Bevezetés az automaták tervezésébe (29 184)	11,50
Vigassy L.: Egybevágósági transzformációk a síkban és a térben (29 247)	9,50

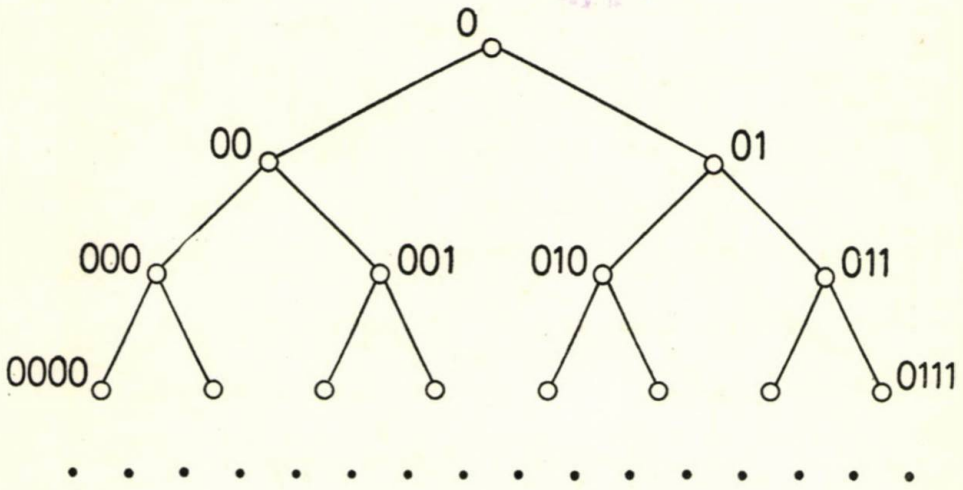
Beszerezhetők

a 17. Pedagógus-könyvesboltban (1053 Bp., Múzeum krt. 3.),
a 44. Könyvesboltban (1052 Bp., Deák F. u. 15.)

INDEX: 25 565

A Matematika Tanítása

Az Oktatási Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



1980. április * XXVII. évfolyam 2 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

AZ OKTATÁSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS LÁSZLÓ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, REMÉNYI GUSZTÁV, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200.
79-649 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

„Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél és a Posta Központi Hírlap Irodánál (postacím: Budapest, V., József nádor tér 1. — 1900) személyesen, vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96162 pénzforgalmi jelzőszámra. Előfizetési díj egész évre 27,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 4,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Ács Pál: A Tankönyvkiadó Vállalat Matematikai Szerkesztőségének munkájáról .. 33
Előd Istvánné: Mi jelent meg eddig az általános és középiskolai új matematika-tantervek és a hozzájuk csatlakozó dokumentumok közül? 38
Süveges Katalin: Tájékoztató a TANÉRT új matematikai taneszközeiről 41
Appel György: Matematikai írásvetítő transzparensek jegyzéke 43
A Bolyai János Matematikai Társulat versenye matematikatanárok számára 46
Beck József: Amőba-játékok 47
Pogáts Ferenc: Kételyek és aggályok 55
Dr. Rédling Elemér: A geometriai transzformáció fogalmának kialakításáról..... 59
Fitos László: Négy gömb hasonlósági pontjaira vonatkozó tételek 62

СОДЕРЖАНИЕ

Ач Пал: О работе Математической Редакции Издательства Учебников 33
Элед Иштваннэ: Какие из школьных программ, учебников и пособий по математике уже явились? 38
Шювегеш Каталин: Информация о новых математических учебных оборудованиях от Танерт (Завод Учебных оборудований)..... 41
Аппел Дьердь: Список математических транспарантов для кодоскопов 43
Соревнование Математического Общества им. Яноша Бояи для учителей математики 46
Бек Йожеф: Игры Амэба 47
Погач Ференц: Сомнения и заботы 55
Др. Редлинг Элемер: Формирование понятия геометрического преобразования 59
Фимош Ласло: Теоремы точках подобии четырех сфер 62

INHALT

Ács, Pál: Über die Arbeit der Redaktion Mathematik der Lehrbuch-Verlagsgesellschaft 33
Frau Ilona Előd (geb.: *Bakos*)*:* Was sind aus den neuen Mathematik-Lehrplänen der Grund- und Mittelschulen und aus den zugehörigen Dokumenten bisher erschienen? 38
Frau Katalin Süveges: Information über die neuen mathematischen Unterrichtsmittel der Firma TANÉRT (Nationale Unternehmung für die Erzeugung und Verwertung von Unterrichtsmitteln) 41
Appel, György: Ein Verzeichnis mathematischer Projektionsfolien zum Schreibprojektor 43
Der Wettbewerb der Bolyai János Mathematischen Gesellschaft für die Mathematiklehrer 46
Beck, József: Amöbe-Spiele 47
Pogáts, Ferenc: Zweifel und Besorgnisse .. 55
Dr. Rédling, Elemér: Über die Gestaltung des Begriffes der geometrischen Transformation 59
Fitos, László: Sätze über die Ähnlichkeitspunkte vier Kugeln 62

ÁCS PÁL
főszerkesztő
Tankönyvkiadó, Budapest

A Tankönyvkiadó Vállalat Matematikai Szerkesztőségének munkájáról

A Vállalat tevékenységi körén belül a Matematikai Szerkesztőség az alábbi területeket gondozza: az általános iskolák, a szakmunkásképző iskolák, a gimnázium és a szakközépiskolák matematika-tankönyvei, valamint a tanítást és a tanulást segítő egyéb kiadványok; a szakközépiskolák szakmai tankönyvei közül a számítástechnika és a műszaki rajz; a tanítóképző intézetek és a tanárképző főiskolák matematika-tankönyvei.

Munkánk legnagyobb és legfontosabb része az általános és a középfokú iskolák matematikatanításának segítése, ellátása nyomtatott segédletekkel. Ez jelenti mindenekelőtt a hivatalos és félhivatalos dokumentumok elkészítését. Ide soroljuk a tankönyveket, a munkafüzeteket, a példatárakat, a tanári kézikönyveket, a tantervi és tankönyvi útmutatókat. Jelenti továbbá a nem tankönyv jellegű, úgynevezett egyéb matematikai irodalmat, amely két csoportba sorolható.

Az egyik csoportba azok a kiadványok tartoznak, amelyeket a matematika iránt érdeklődő, a matematika iránt fogékony, tehetséges, matematikaigényes pályát választó, tovább tanulni szándékozó tanulók számára készítünk. Ide tartoznak az általános iskolai és a középiskolai matematika-szakköri füzetek, a versenyek és felvételi vizsgák feladatainak rendszeres megjelentetése, a felvételi vizsgára való felkészülést segítő példatárak és más, a tanárok vagy a tanulók számára is szánt matematikairodalom. Gondolunk a kisebbek matematikai nevelésére, fejlesztésére, látókörük, matematikai műveltségük szélesítésére, mélyítésére is. Éppen az elmúlt évben látott napvilágot az „Utazások Matematikaországban" című, kisebbeknek szánt sorozat négy kötete, kettő első, kettő második kiadásban.

A másik csoportba tartoznak a pedagógusoknak szánt, a pedagógusok szakmai és tantárgypedagógiai kultúrájának növelését segíteni kívánó kiadványok. Itt mindjárt megemlítem példaként az elmúlt év végén megjelent L. A. Kaluzsnyin: Bevezetés az absztrakt algebrába című művet, amely az algebrai struktúrák elméletének alapfogalmait és a modern algebra leglényegesebb fejezeteit tárgyalja.

Legfontosabb munkapartnerünk az Országos Pedagógiai Intézet Matematikai Nevelési Osztálya. Az iskolai dokumentumokat — aktuálisan a reform-dokumentumokat — az Oktatási Minisztériumon keresztül az OPI rendeli meg, és az elkészült kéziratok nem kerülhetnek jóváhagyásra az OPI illetékes munkatársának egyetértő véleménye nélkül.

Minthogy a mi munkánk nagyobbik része a megszerkesztett, nyomdakész kézirat leadásáig tart — persze ekkor még hátravan a szedésről készült levonat ellenőrzése, javítása és a tördelés — ezért mi a megjelenéshez képest legalább egy teljes évvel előbbre tartunk. Így 1979-ben azokat a kéziratokat adtuk le, amelyek legkorábban 1980-ban jelennek meg, és 1980-ban azokat kell kimunkálnunk, amelyeknek 1981-ben kell megjelenniük. 1979-ben tehát mi már az általános iskolai és szakközépiskolai reform harmadik, a gimnáziumi reform második lépcsőjén munkálkodtunk, vagyis az általános iskola harmadik és hetedik osztályának, a szakközépiskola harmadik, a gimnázium második osztályának dokumentumait készítettük el. A következő lépcső nyilvánvalóan az általános iskola 4. és 8. osztálya, a szakközépiskola IV. osztálya, a gimnázium III. osztálya. A szakközépiskolák közül egyébként csak a szakmun-

kásképzést folytató szakközépiskolákban indult a reform 1978-ban, a középfokú képzést folytatókban azonban csupán a gimnáziumival egyidőben, 1979-ben.

Az általános iskola 1. és 2. osztálya számára munkafüzet és tanári kézikönyv, a 3. és a 4. osztály számára tankönyv, munkafüzet és tanári kézikönyv készült, illetve készül. A felső tagozat valamennyi évfolyama számára tankönyv, munkafüzet, tantervi útmutató és tanári kézikönyv készül, kivételképpen az 5. osztály számára nem lesz tantervi útmutató. Sajnos, a kézikönyv és a tankönyv egyidejű megjelentetését a 6—8. osztály számára nem tudtuk megoldani, a kézikönyvek a tankönyvekhez képest egy évet késnek. Ez nem a kiadón múlik, az egyidejűség a szerzők számára megoldhatatlan.

A szakközépiskolának négyféle óraterve, ennek megfelelően négyféle tanterve van matematikából: az osztályonként heti 5—5—4—2, 5—4—3—2, 4—3—3—2 és 5—5—6—6 matematikaórához készített tanterv. Ezek közül az első, második és negyedik változat számára mind a négy osztályban azonos az alaptankönyv.

A negyedik variáns egyébként a közgazdasági szakközépiskolák számítástechnikai programozó és számítástechnikai folyamatszervező ágazatának matematika-tanterve. Számukra a többletanyagukból az alaptankönyv mellé kiegészítő tankönyv készült, illetve készül: az I. és II. osztály számára egy kötetben, a III. és IV. osztály számára külön kötetben.

A II. osztálytól kezdve külön tankönyv készül az osztályonként heti 4—3—3—2 óraszámú tantervváltozathoz, amelyet az óvónői és növényvédelmi szakközépiskolában alkalmaznak.

A gimnáziumi új tantervhez két párhuzamos tankönyv készül, amelyek ugyanazt a tantervi anyagot egymástól lényegesen eltérő módszertani koncepcióval dolgozzák fel. Az egyik, műfaját tekintve hagyományos tankönyv, ehhez csatlakozó munkafüzettel. A másik, műfaját tekintve teljesen új, ún. munkatankönyv. Ebben nem az a lényeg, hogy a tanuló magában a könyvben és nem külön füzetben dolgozik, hanem az, hogy a fogalmakat, tételeket, bizonyításokat nem készen közli, hanem ezeket célszerűen megválasztott feladatsorok és szükség szerint a tanár segítségével nagyrészt maguknak a tanulóknak kell megalkotniuk.

A gimnáziumban a III. osztálytól kezdve három különböző matematikatanterv fut párhuzamosan: az alaptanterv, a fakultatív „A" és a fakultatív „B" tanterv. A fakultatív tantervek többletanyagát nem lehet megoldani kiegészítő könyvvel, mert a fakultatív anyagban és az alaptanterv anyagában egyes esetekben az azonos címet viselő témaköröket is más apparátussal és más mélységben dolgozzák fel. Mindenképpen külön tankönyv készül a fakultatív „B" tantervhez, ennek a tankönyvnek viszont nem lesz párhuzamos munkatankönyv alternatívája. A III. és a IV. osztály számára a három különböző tantervhez három különböző tankönyv készül, továbbá az alaptantervhez és a fakultatív „A" tantervhez megmarad a választási lehetőség az ún. hagyományos tankönyv és az ugyanazt az anyagot más módszerrel feldolgozó munkatankönyv között.

Hogy milyenek a már eddig elkészült és használatba került reformdokumentumok, ezt a gyakorlatnak kell eldöntenie: még korai volna tárgyilagos, tapasztalatilag megalapozott véleményt mondani.

A reformdokumentumokkal kapcsolatban szeretnék szólni néhány szót a pályázati rendszerről és a tankönyvi bizottságokról. A magam részéről szenvedélyes híve vagyok a kialakult eljárásnak demokratikus volta miatt, és igen nagy gonddal őrködtünk az eljárás tisztaságán.

Az alsó tagozatot kivéve valamennyi iskolatípusban az első forduló, tehát az általános iskola 5. osztályos, a szakközépiskola és a gimnázium I. osztályos, végül a dolgozók középiskolái I. osztályos tankönyveire meghirdetett pályázat volt igazán eredményes, a második forduló

nem hozott új eredményt, ezért a továbbiakban már nem látszott célszerűnek meghirdetni a pályázatokat. A pályázatokat elbíráló öttagú tankönyvi bizottság tagjai az MTA, az OPI, a Tankönyvkiadó egy-egy képviselője és két gyakorló pedagógus.

Az ún. „egyéb" kiadványainkkal kapcsolatban mindenekelőtt azt kell elmondani, hogy egyetlen kiadványunk bolti ára sem éri el az előállítási költséget, a kiadó állami dotációja a Kulturális Minisztérium költségvetésének része. Ezt azért fontos tudni, mert ebből következik, hogy számunkra mind papírterjedelemben, mind forintértékben meghatározott keret áll rendelkezésre, amellyel gazdálkodhatunk, amellyel optimálisan kell gazdálkodnunk. Ez a keret papírterjedelemben hozzávetőlegesen évenként 80 ív. Ez az új kiadványokra vonatkozik, ebben nincsenek benne az újranyomások.

Példaként felsorolom az utóbbi két évben megjelent és a következő években megjelenő, a pedagógusok és a tanulók számára készült, illetve készülő kiadványainkat.

1978-ban új:

— Bereznai Gyula—Varecza Árpád: Tanárképző főiskolák matematikaversenyei I.;
— Perge Imre: A számítástechnika alapjai;
— Pelle Béla (szerkesztő): Így tanítjuk a matematikát I—II.
(Ez utóbbi kiadvány elsősorban az általános iskolai pedagógusok számára készült, könyvárusi forgalomba nem is került, mert mind a 20 000 példányt az OM vette meg és juttatta el az általános iskolákba. Bolti forgalom számára most van előkészületben az átdolgozott 2. kiadás.)

1978-ban újranyomás:

— Péter Rózsa: Játék a végtelennel;
— Sain Márton: Matematikatörténeti ABC;
— Radnai Gyuláné: A játék matematikája;
— Baranyai Zsolt—Lippner György: Egyenlőtlenségek.

1979-ben új:

— Élő matematika 5. Cikkgyűjtemény hét szerzőtől;
— Buvári Anikó: Repülőgéppel a galacsinták tartományába;
— Scharnitzky Viktor: Egyetemi felvételi feladatok matematikából IV.;
— Középiskolai matematikai versenyek 1975—76;
— Radnai Gyuláné: Kivi és Apó;
— Vigassy Lajos: Egybevágósági transzformációk a síkban és a térben;
— L. A. Kaluzsnyin: Bevezetés az absztrakt algebrába;
— Pálfai Pál (szerkesztő): Felvételi feladatok, Matematika—Fizika—Rajz.

1979-ben újranyomás:

— Scharnitzky Viktor: Egyetemi felvételi feladatok matematikából I.;
— Gáll Éva: Vigyázat, csak gyerekeknek!
— Gáll Éva: Matematikaország határán;
— Fried Ervin: Oszthatóság és számrendszerek;
— Hardy Zsigmond—Sólyom Mihály: Út a modern algebrához;
— Pálfai Pál (szerkesztő): Felvételi feladatok, Matematika—Fizika—Rajz;
— Felvételi kalauz matematikából (FPK munkaközössége);
— Szederkényi Antal: Topológia.

1980-ban jelenik meg:

— Ismerkedés a kísérleteinkkel. Cikkgyűjtemény;
— Peller József: A tanulók matematikai tevékenységének irányítása és tervezése I. Számhalmaz, ponthalmaz;
— Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából (Munkaközösség).
(Ezt a példatárat az OM rendelte meg azzal a céllal, hogy ebből jelölik ki az iskolai érettségi írásbeli vizsga feladatait. A példatár mintegy 4000 feladatot tartalmaz.)
— Bognár Jánosné—Nemetz Tibor—Tusnády Gábor: Ismerkedés a véletlennel;
— Máté László: Rekurzív sorozatok;
— Francesco Speranza: Relációk és struktúrák;
— Rédling Elemér: A tanulók matematikai tevékenységének irányítása és tervezése II. Geometriai transzformációk.

1981-ben jelenik meg:

— Középiskolai matematikai versenyek 1977—78—79;
— Kalmár László: Analízis I—II.;
— Balogh Viktória—Papp István: Világnézeti nevelés az általános iskolai matematika tanításában;
— Scharnitzky Viktor: Egyetemi felvételi feladatok matematikából V.;
— Lévárdi Zoltán—Sain Márton: Matematikatörténeti feladatok;
— Pelle Béla (szerkesztő): Így tanítjuk a matematikát I—II.;
— Sümegi Ferenc—Szekeres János: A matematika és a fizika tanításának kapcsolatai;
— Molnár József: A matematikai feladatok tanulása és tanítása;
— Hódi Endre (szerkesztő): Matematika szülőknek I—II.;
— Bedő László: Függvények.

1982. évi terveinkből:

— Kósa András: Az analízis elemeinek tanítása a középiskolában;
— Gyömöri László: Gyakorlófeladatok az algoritmusok tanításához;
— Peller József—Medgyesy László: A tanulók matematikai tevékenységének irányítása és tervezése III. Függvényvizsgálat, vektortér;
— Lukács Ottó: Operációkutatás;
— L. Berg: Másodrendű differenciaegyenletek alkalmazásokkal;
— E. I. Ignatyev: A találós kérdések birodalmában.

Néhány gondunk, problémánk

A reformdokumentumok előállítása az általános iskolai ideiglenes matematika-tanterv fokozatos bevezetésének megkezdése, vagyis 1974 óta rendkívül feszített ütemű munkát igényel szerkesztőségünktől mindenekelőtt a határidők miatt. Állandóan őrlődünk a szerzők, a lektorok, illetve a műszaki, a nyomdai kivitelezők között. Az előbbiek késnek, az utóbbiak sürgetnek. Ezekben az években az általános iskola felső tagozatában három matematika-tanterv van érvényben egyidejűleg — ha egy-egy osztályban nem is mindegyik: a régi, az ideiglenes és az új. A szükséges tankönyveknek mindegyikhez rendelkezésre kell állniuk.

Ami az utánnyomást illeti, az teljesen természetes, hogy a használatban levő dokumentumoknak állandóan kaphatóknak kell lenniük a szükséges mennyiségben. Mi a helyzet azonban a szakköri füzetekkel s egyéb szakmai és módszer-

tani kiadványokkal? Az utóbbi években, évtizedekben rengeteg jó szakmai, módszertani, szakköri kiadványunk jelent meg. Ezek túlnyomó többsége elfogyott, legalábbis nem kapható a boltokban, bár a Könyvértékesítő Vállalat kimutatásai szerint van belőle raktári készlet, ezért nem rendelnek belőle utánnyomást. Meg kellene vizsgálni eddigi kiadványainkat, hogy melyek azok közülük, amelyek jó lenne, ha állandóan kaphatók lennének.

A hivatalos és félhivatalos dokumentumok alakulása hosszú távra világosan áll előttünk. Az általános iskolai új tantervet 10—15 évre stabilnak reméljük, arra számítunk, hogy az ezekhez készült tankönyvek, munkafüzetek jónak bizonyulnak, ezért a közeljövőben legfeljebb a tanítás során talált hibáik kijavítására lesz szükség.

A középiskolai tantervek viszont a 80-as évek derekán az általános iskolai új tanterv felfutásának következtében módosításra szorulnak, ezért feltehetően változtatni, módosítani kell a szakmunkásképző iskolák, szakközépiskolák és gimnáziumok tankönyveit is.

A dolgozók középiskolái különböző típusainak reformjához még csak most látunk hozzá, később az imént említett ok miatt ezek tantervei és tankönyvei is újra módosulásra szorulnak, természetesen továbbra is számolni lehet néhány év eltolódással a nappali tagozat dokumentumaihoz képest.

Előbb-utóbb feltehetően sor kerül a feladatgyűjtemények további korszerűsítésére, átdolgozására is.

Nem rendelkezünk viszont sem középtávú, sem hosszú távú tervvel az ún. „egyéb" kategóriájú könyvek, vagyis a pedagógusok és a diákok matematikakönyvtára terén. Pedig egy-egy jól átgondolt, jól megtervezett sorozat révén sokat tehetnénk egyrészt a pedagógusok korszerű szakmai és tantárgy-pedagógiai továbbképzése, önképzése érdekében, másrészt érdekes és gazdag irodalommal láthatnánk el a különböző korosztályú tanulókat.

Ebben a bizonyos „egyéb" kategóriában a kívánatosnál nagyobb szerep jut a véletlennek. Hiszen megjelentetni csak azt lehet, amit megírnak. A külföldön megjelenő legsikerültebb, legértékesebb művekről sincs kellő áttekintésünk. Ezekben a kérdésekben több segítséget igénylünk az OPI-tól, a Bolyai Társulattól, az egyetemek és főiskolák matematika tanszékeinek munkatársaitól. Szerény lehetőségeinket minél jobban kihasználva lelkes odaadással szeretnénk továbbra is jól szolgálni a magunk területén a felnövekvő nemzedék eredményes nevelésének ügyét.

Rohovszky Rudolf

Matematika

Középiskolára előkészítő tanfolyamok anyaga

Ez a könyv a továbbtanulni szándékozó általános iskolai tanuló számára készült. Tartalmazza egyrészt a 8. osztályosok évi 15 előkészítő foglalkozásának teljes anyagát, másrészt — a kiegészítésben — azokat a feladatsorokat, amelyek az érdeklődőknek biztosítanak további önálló gyakorlási lehetőséget.

Célja az, hogy a középiskolában törésmentesen és sikerrel folytassák a tanulást azok, akik odakerülnek. Ennek érdekében fejleszteni szeretné a logikus gondolkodási képességet. (8059)

ELŐD ISTVÁNNÉ
felelős szerkesztő
Tankönyvkiadó, Budapest

Mi jelent meg eddig az általános és középiskolai új matematika-tantervek és a hozzájuk csatlakozó dokumentumok közül?

Az alábbiakban közöljük a már megjelent tantervek és dokumentumok jegyzékét a legszükségesebb bibliográfiai adatokkal, iskolatípusok szerinti csoportosításban. Minden esetben csak az utolsó kiadást jelöljük meg. Zárójelben feltüntetjük az alkalmazásba vétel évét is.

1. ÁLTALÁNOS ISKOLA

1.1. **Alsó tagozat**

1.1.1. *Ideiglenes tanterv*

Oktatási Minisztérium, Budapest, 1976. ISBN 963 7023 42 9. (1974-től.)

Kovács Zoltán: Matematika az ideiglenes matematika-tanterv 3. osztályos anyagának tanulásához. 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 1322. (1976-tól.)

Erdész Edéné—dr. Kovács Vendelné: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 3. osztályos anyagának tanulásához. 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 1322/M. (1976-tól.)

Erdész Edéné—dr. Hámori Miklós—dr. Kovács Vendelné—Kovács Zoltán—Radnainé Szendrei Julianna—Szálka Györgyné—dr. Varga Tamás: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 3. osztályos anyagának tanításához I., II. kötet. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1976—77. R. sz.: 91 485/I., II. (1976-tól.)

Kovács Zoltán: Matematika az ideiglenes matematika-tanterv 4. osztályos anyagának tanulásához. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 1422. (1977-től.)

Cervenakné Neményi Eszter—Halmos Istvánné—Radnainé Szendrei Julianna—dr. Varga Tamás: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 4. osztályos anyagának tanulásához. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 1422/M. (1977-től.)

Halmos Istvánné—dr. Ill Mártonné—Kovács Zoltán—Tiszai Zoltánné: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 4. osztályos anyagának tanításához I., II. kötet. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 91 490/I., II. (1977-től.)

1.1.2. *Új tanterv*

Az általános iskolai nevelés és oktatás terve I., II. kötet. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1977. ISBN 963 7801 49 9. (1978-tól.)

Cervenakné Neményi Eszter—dr. Varga Tamás: Matematika-munkalapok. Általános iskola 1. osztály. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 102/M. (1978-tól.)

Cervenakné Neményi Eszter—dr. Göndöcs László—Merő László—Merő Lászlóné—dr. Varga Tamás: Kézikönyv a matematika 1. osztályos anyagának tanításához. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 83 015. (1978-tól.)

Cervenakné Neményi Eszter—dr. Varga Tamás: Matematika-munkalapok. Általános iskola 2. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 202/M. (1979-től.)

Cervenakné Neményi Eszter—Herczeg Jánosné—Merő László—dr. Varga Tamás (szerkesztette Novák Lászlóné): Kézikönyv a matematika 2. osztályos anyagának tanításához. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 83 021. (1979-től.)

1.2. Felső tagozat

1.2.1. *Ideiglenes tanterv*

Oktatási Minisztérium, Budapest, 1976. ISBN 963 7023 43 7. (1974-től.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Matematika az általános iskola 5. osztálya számára. 5. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 1522. (1974-től.)

Cser Andor—Imrecze Zoltánné—Pálfy Sándor: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 5. osztályos anyagának tanulásához. 5. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 1522/M. (1974-től.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Feladatgyűjtemény és munkalapok. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 1522/K. (1978-tól.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 5. osztályos anyagának tanításához. 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 91 478. (1974-től.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Matematika az általános iskola 6. osztálya számára. 4. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 1622. (1975-től.)

Cser Andor—Imrecze Zoltánné—Pálfy Sándor: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 6. osztályos anyagának tanulásához. 4. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 1622/M. (1975-től.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 6. osztályos anyagának tanításához, 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 91 480. (1975-től.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Matematika az általános iskola 7. osztálya számára. 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 1722. (1976-tól.)

Cser Andor—Imrecze Zoltánné—Pálfy Sándor: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 7. osztályos anyagának tanulásához. 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 1722/M. (1976-tól.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 7. osztályos anyagának tanításához. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1976. R. sz.: 91 486. (1976-tól.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Matematika az általános iskola 8. osztálya számára I., II. kötet. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 1822/I., II. (1977-től.)

Cser Andor—Imrecze Zoltánné—Pálfy Sándor: Munkalapok az ideiglenes matematika-tanterv 8. osztályos anyagának tanulásához. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 1822/M. (1977-től.)

Cser Andor—Pálfy Sándor: Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 8. osztályos anyagának tanításához. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 91 487. (1977-től.)

1.2.2. *Új tanterv*

Az általános iskolai nevelés és oktatás terve III. kötet. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1978. ISBN 963 7801 68 5. (1978-tól.)

Dr. Eglesz Istvánné—Kovács Csongorné—Sztrókayné Földvári Vera: Matematika általános iskola 5. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 502. (1978-tól.)

Csahóczi Erzsébet—Halmos Istvánné—Radnainé Szendrei Julianna —Varga Katalin: Matematika-munkalapok. Általános iskola 5. osztály. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 502/M. (1978-tól.)

Dr. Eglesz Istvánné—Kovács Csongorné—Radnainé Szendrei Julianna—Sztrókayné Földvári Vera: Kézikönyv a matematika 5. osztályos anyagának tanításához. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 83 001. (1978-tól.)

Dr. Varga Tamás—Radnainé Szendrei Julianna: Az általános iskolai nevelés és oktatás terve. Tantervi útmutató. Matematika 6. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 83 004. (1979-től.)

Dr. Eglesz Istvánné—Kovács Csongorné—Sztrókayné Földvári Vera: Matematika általános iskola 6. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 602. (1979-től.)

Csahóczi Erzsébet—Halmos Istvánné—Radnainé Szendrei Julianna—Varga Katalin: Matematika-munkalapok. Általános iskola 6. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 602/M. (1979-től.)

2. KÖZÉPISKOLA (ÉS KÖZÉPFOKÚ ISKOLA)

2.1. **Szakmunkásképző iskola**

A szakmunkásképző iskolák nevelési és oktatási terve. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 84 061. (1977-től.)

Koller Lászlóné: Módszertani útmutató matematikából a szakmunkásképző iskolák számára. Pedagógus továbbképzés könyvtára. 1. kiadás. Országos Pedagógiai Intézet, Budapest, 1977. (1977-től.)

Bige Istvánné—Cser Andor—Szegedi Miklós: Matematika I., I. osztály. 3. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 12 502. (1977-től.)

Bige Istvánné: Matematika munkalapok, I. osztály. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 12 502/M. (1977-től.)

Bige Istvánné: Módszertani útmutató a matematika munkalapokhoz I. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 84 001/I. (1977-től.)

Bige Istvánné—Csánk István—Szabó Sándorné: Matematika II., II. osztály. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 12 602. (1978-tól.)

Bige Istvánné: Matematika munkalapok, II. osztály. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 12 602/M. (1978-tól.)

Bige Istvánné: Módszertani útmutató a matematika munkalapokhoz II. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 84 001/II. (1978-tól.)

Bedő László—Bige Istvánné—Szabó Sándorné: Matematika III., II.—III. osztály. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 12 702. (1978-tól.)

Szabó Sándorné: Matematika munkalapok, II.—III. osztály. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 12 702/M. (1978-tól.)

Szabó Sándorné: Módszertani útmutató a matematika munkalapokhoz III. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 84 001/III. (1978-tól.)

2.2. **Szakközépiskola**

A szakközépiskolai nevelés és oktatás terve. Matematika. Heti 5—5—4—2 óra. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1978. R. sz.: 100—33. (1978-tól.)

A szakközépiskolai nevelés és oktatás terve. Matematika. Heti 5—4—3—2 óra. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1978. R. sz.: 100—34. (1978-tól.)

Lasztóczi Gyula: A szakközépiskolai nevelés és oktatás terve. Tantervi útmutató. Matematika I., I.—II. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977. R. sz.: 84 021/I. (1978-tól.)

Lasztóczi Gyula: A szakközépiskolai nevelés és oktatás terve. Tantervi útmutató. Matematika I I., III.—IV. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 84 021/II. (1980-tól.)

Czapáry Endre: Matematika I. osztály. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 14 102. (1978-tól.)

Czapáry Endre: Matematika-feladatlapok I. osztály. 2. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 14 102/F. (1978-tól.)

Czapáry Endre: Matematika II. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 14 202. (1979-től.)

Czapáry Endre: Matematika-feladatlapok II. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 14 202/F. (1979-től.)

2.3. **Gimnázium**

A gimnáziumi nevelés és oktatás terve. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. R. sz.: 84 064. (1979-től.)

Ábrázoló geometria. Kísérleti fakultatív tanterv. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1978. R. sz.: 4077. (1978-tól csak a kijelölt iskolákban.)

Matematika, A változat. Kísérleti fakultatív tanterv. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1978. R. sz.: 4052. (1978-tól csak a kijelölt iskolákban.)

Matematika, B változat. Kísérleti fakultatív tanterv. 1. kiadás. Oktatási Minisztérium, Budapest, 1978. R. sz.: 4051. (1978-tól csak a kijelölt iskolákban.)

dr. Urbán János: A gimnáziumi nevelés és oktatás terve. Tantervi útmutató. Matematika. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 84 009. (1979-től.)

dr. Korányi Erzsébet: Matematika I. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 13 102. (1979-től.)

dr. Korányi Erzsébet: Matematika-feladatlapok I. osztály. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 13 102/F. (1979-től.)

M. dr. Bartal Andrea—Pálfalvi Józsefné: Matematika munkatankönyv I. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 13 125/MT. (1979-től.)

M. dr. Bartal Andrea—Pálfalvi Józsefné: Tankönyvi útmutató az I. osztályos Matematika munkatankönyvhöz. 1. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979. R. sz.: 84 060. (1979-től.)

SÜVEGES KATALIN
tudományos munkatárs
TANÉRT

Tájékoztató a TANÉRT új matematikai taneszközeiről

Az általános és középiskolai új tantervek bevezetésével nőtt az iskolák taneszközigénye. Ellátásuk megfelelő taneszközökkel több intézmény együttes munkájának eredménye. Ebben a munkában részt vesz az Országos Pedagógiai Intézet (OPI), a Tankönyvkiadó Vállalat (TKV), az Országos Tanszergyártó és Értékesítő Vállalat (TANÉRT), az Országos Oktatástechnikai Központ (OOK), az Iskolarádió (IR), az Iskolatelevízió (ITV) és még más intézmények is.

Most a TANÉRT ezzel kapcsolatos feladatairól szeretnénk ismertetést adni.

Eddig az iskolák számára alapvető fontosságúnak ítélt taneszközök jegyzékei jelentek meg. Az általános iskolák számára 1973-tól kezdődően öt, a középiskolák számára 1975-től két, a szakmunkásképző iskolák közismereti tárgyaihoz 1978-ban egy taneszköz-alapjegyzék készült el.

Jelenleg az OPI, a TANÉRT és az OOK illetékes munkatársai a nem alap-

vető fontosságú, az ajánlott és a már elavult taneszközök jegyzékének meghatározására dolgoznak ki javaslatot, amelyet az Oktatási Minisztérium (OM) fog véglegesíteni.

A TANÉRT feladata elsősorban az alapjegyzékekben szereplő eszközök közül a nem audiovizuális eszközök tervezése (az audiovizuális eszközök elkészítéséért az OOK felelős), a taneszközök gyártása vagy gyártatása és forgalmazása.

A TANÉRT-en belül a taneszközöket a Tanszerfejlesztési Főosztályon tervezik. A taneszközök végleges tervének kialakítása többfokozatú munka, amely az OPI, OOK adott tárggyal foglalkozó munkatársainak közreműködésével, szakfelügyelők, gyakorló tanárok bevonásával történik.

A Tanszerfejlesztési Főosztály munkatársai szakfelügyelői értekezletek, továbbképzések, iskolalátogatások során információkat gyűjtenek a taneszközök beválásáról, a felvetődő problémákról. Ezek a tapasztalatok felhasználhatók a taneszközök tartalmi és formai javítása érdekében.

A TANÉRT szoros kapcsolatot tart fenn több szocialista ország taneszközökkel foglalkozó intézményével, illetve vállalatával. Folyamatos a tapasztalatcsere a taneszközök kutatásáról, fejlesztéséről és felhasználásáról.

A taneszköz-alapjegyzékekben az általános és középiskolai új matematika-tantervek igényeinek megfelelően több matematikai taneszköz szerepel. Ezeknek nagy része már kikerült az iskolákba (az általános iskolák I., II. és III. számú, valamint a középiskolák I. számú alapjegyzékében szereplők).

Az újabb, már gyártás alatt levő eszközök közül néhány (az általános iskolák IV. számú alapjegyzékéből):

Applikációs elemek a számrendszerek szemléltetéséhez.

Táblázatok a Dienes-készlethez.

Tanári és tanulói számológép.

Az *„Applikációs elemek a számrendszerek szemléltetéséhez"* a tanulói Dienes-készlet szerkezeti felépítését követi, annak síkban elhelyezhető tanári változata. Kis kocka, kis rúd, kis réteg, nagy kocka, nagy rúd axonometrikus képének megfelelő alakú műanyag lapokból áll. Az elemek kettes, hármas stb. számrendszerekhez egyaránt használhatók. A lapok hátlapjára vaslemezt ragasztva mágnessel helyezhetők a vastáblára.

A *Táblázatok a Dienes-készlethez* kétféle táblázatot tartalmazó tanulói eszköz, amely a Dienes-készlet használatát könnyíti meg. Mindkétféle táblázat fejlécén a Dienes-készlet elemeinek rajzai találhatók, alattuk oszlopok vannak. A nagyobb táblázat összehajtható műanyag lap, arra való, hogy a tanulók azon végezzék a Dienes-készlet elemeivel történő manipulálást. A kisebb táblázat radírozható műanyag lemez, a manipulálás eredményének rögzítését szolgálja. A táblázatok tetszőleges alapú számrendszerekhez használhatók.

A *tanári és tanulói számolólécek* felépítése megegyezik, csak méreteikben különböznek. Mindkettőn két álló rész között egy csúsztatható rész helyezkedik el. Az eszköz pozitív és negatív számok összeadásának és kivonásának megértetésére, a műveletek tulajdonságainak szemléltetésére alkalmas.

Elkészültek az általános iskolai V. sz. és a középiskolai II. számú jegyzékben szereplő matematikai eszközök pedagógiai előtervei is. Gyártásukra a következő két évben kerül sor. Ezek:

Matematikai görbesablon-készlet.

Faliképek a matematika tanításához.

Babylon-építőjáték.

Testmodell-sorozat.

Zsebszámológép.

A *matematikai görbesablon-készlet* tartalmazza a középiskolai tantervi anyagban előforduló trigonometrikus, exponenciális és hatványfüggvényeknek a sablon segítségével megrajzolható képét. A függvények képe mellett fel van tüntetve a függvények neve, valamint ott találhatók a görbék koordináta-rendszerben való elhelyezéséhez szükséges szakaszok

is. A sablon anyaga nehezen törő, átlátszó műanyag.

A *faliképek* a tervek szerint a következők lesznek:

Hogyan oldjunk meg feladatokat? címmel a feladatmegoldás Pólya György javasolta menetének ábrázolása.

Néhány függvénytípus ábrázolása derékszögű koordináta-rendszerben és nyíl-diagrammal.

A valós számokkal, a vektorokkal és a halmazokkal végzett műveletek tulajdonságainak párhuzamos ábrázolása.

A *Babylon*-építőjáték a kereskedelmi forgalomban levő Babylon-játék iskolai használatra kiegészített változata.

A *testmodell-sorozat* elsősorban a műszaki rajz tanításához készül, de a matematikatanításban is alkalmazható tanulói eszközként. Mértani testek (kocka, téglatest, négyzetes oszlop, gúla, kúp, henger, gömb) síkokkal metszett műanyag modelljei alkotják a sorozatot. A testek méretei 3—6 cm közöttiek.

A *zsebszámológép* általános iskolában tanári, középiskolában tanulói eszközként szerepel a taneszközjegyzékekben. Várhatóan ugyanolyan típusú zsebszámológép kerül mind a két iskolatípusba. A zsebszámológépek iskolai használatáról szerzett tapasztalatok azt mutatják, hogy erre a célra sokfüggvényes, programozható zsebszámológép felel meg.

Alapjegyzékben nem szereplő, de a közeljövőben gyártásra kerülő taneszköz a *Transzparens-készlet a számok többszörösének szemléltetéséhez*, amelyet András Mihály tanár újítása alapján dolgoztak ki. A készlet kivetíthető számlapból és erre illeszkedő fóliákból áll. Az egyes fóliák úgy fedik le a számlapot, hogy csak egy adott szám és annak többszörösei maradjanak láthatók. Az eszköz alkalmas számelméleti fogalmak szemléltetésére, többszörösök gyors meghatározására, továbbá oszthatósági szabályok megállapítására.

Ezzel gyakorlatilag befejeződik a TANÉRT-nél az alapjegyzékekben szereplő matematikai taneszközök tervezése.

A következő évek programja a már meglevő eszközök felülvizsgálata mellett az ajánlott eszközök tervezése és gyártása lesz.

APPEL GYÖRGY
középiskolai vezető tanár
Budapest

Matematikai írásvetítő transzparensek jegyzéke

A matematikaórákon egyik leggyakrabban használt oktatástechnikai eszköz az írásvetítő. Ehhez ma már sok, központilag gyártott transzparens van. Az alábbiakban a hazánkban kölcsönözhető, illetve megvásárolható írásvetítő transzparensek jegyzékének közrebocsátásával kívánjuk segíteni a gyakorló pedagógusok munkáját.

Magyarországon az OOK-tól (Veszprém, Schönherz Zoltán u. 2.; 8200) és a Fővárosi Pedagógiai Intézet Oktatástechnikai Csoportjától (FPI; Budapest, Bródy Sándor u. 14.; 1088) kölcsönözhető transzparens.

A TANÉRT is elkészítette a gimnáziumok első három osztálya számára transzparenssorozatát (T/1, T/2, T/3). Ezek megvásárolhatók a boltjaikban.

A transzparenseket témakör szerinti csoportosításban soroljuk fel.

Algebra:	Beszerezhető:
Több tag szorzása egy taggal.	T/1
Több tag szorzása több taggal.	T/1
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ azonosság szemléltetése.	T/1
$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$ azonosság szemléltetése.	T/1
Halmazok, mértani helyek:	
Feladatok a halmazok köréből.	OOK
Adott egyenestől egyenlő távolságra levő pontok mértani helye a síkban.	T/1
Szög két szárától adott távolságra levő pontok mértani helye.	T/1
Szögfelező mint mértani hely.	T/1
Szakaszfelező merőleges.	T/1
Sets stage (Halmazok: 26 db transzparens a feliratok magyar fordításával).	OOK
A háromszög nevezetes vonalai és pontjai:	
A háromszög köré írt kör.	T/1
A háromszögbe írt kör.	T/1
A háromszög magasságpontja.	T/1
A háromszög középvonalai.	T/1
A háromszög súlyvonalai.	T/2
Geometriai transzformációk	
Párhuzamos eltolás.	FPI
Pontra vonatkozó tükrözés.	FPI
Pont körüli forgatás.	FPI
Tengely körüli forgatás.	FPI
Egyenesre vonatkozó tükörkép szerkesztése.	T/1
Pontra vonatkozó tükrözés mint pont körüli 180°-os elforgatás.	T/1
A paralelogramma mint középpontosan szimmetrikus síkidom.	T/1
Pont körüli elforgatás tulajdonságai.	T/1
Síkban való eltolás tulajdonságai.	T/1
Feladat eltolás alkalmazására.	T/1
Egybevágósági transzformációk; középpontosan hasonló alakzatok.	T/2
Függvények, függvény- és görbetranszformációk:	
$y=x$, $y=2x$, $y=-2x$, $y=\frac{1}{2}x$ és $y=-\frac{1}{2}x$ képe.	FPI, T/2
Egyenes arányosságot kifejező függvény képe.	FPI
Fordított arányosságot kifejező függvény képe.	FPI
Hiperbola transzformációi.	FPI
Parabola és transzformációi [$y=2x^2$, $y=-2x^2$, $y=x^2$, $y=(x+4)^2$ és $y=(x+4)^2+2$ függvények ábrázolása].	FPI, T/2
$y=\sqrt{x}$ függvény ábrázolása.	T/2
Az exponenciális és a logaritmus-függvény képe.	T/2
$y=\sin x$, $y=\cos x$ és $y=\operatorname{tg} x$ függvények ábrázolása.	T/3
Az $y=\sin x$ függvény néhány transzformációja.	T/3

Geometriai szerkesztések:

Körhöz érintő szerkesztése adott (külső) pontból.	T/1
Háromszög szerkesztése két oldal és a kisebbikkel szemközti szög ismeretében.	T/1
Szabályos ötszög szerkesztése.	T/2
$\sqrt{2}$ és $\sqrt{3}$ mérőszámú szakaszok megszerkesztése.	T/2
Két adott szakasz mértani közepének megszerkesztése.	T/2

Kör:

Kerületi szögek.	T/1
Húrnégyszög, érintőnégyszög.	T/1

Geometriai bizonyítások:

Párhuzamos szelők tétele.	T/2
Befogótétel.	T/2
Pitagorasz tétele.	T/2

Vektorok:

Vektorok összeadása és annak tulajdonságai.	T/1
Vektorok kivonása.	T/1
Vektor felbontása két adott irányú vektor összegére.	T/2
Vektor 90°-os elforgatottja.	T/3
Helyvektor, szabad vektor.	T/3

Térmértan:

A gúla alappal párhuzamos síkmetszetei.	T/2

Goniometria, trigonometria:

Egy szög sinusának, cosinusának, tangensének és cotangensének értelmezése.	T/2
A sinustétel és alkalmazása.	T/3
A cosinustétel és alkalmazása.	T/3
A sinusfüggvényre vonatkozó összegezési tétel.	T/3

Koordinátageometria:

Végpontjaival adott szakasz osztópontjainak koordinátái.	T/3
Háromszög súlypontjának koordinátái.	T/3
A kör egyenlete.	T/3
A parabola csúcsponti egyenlete.	T/3

Számítástechnika:

Computer education in school. I—II. (Számítógépes oktatás az iskolában: 37 db transzparens.)	OOK
Számítógépes ismeretek (16 db transzparens).	OOK

Egyéb:

Graphiques. (Grafikonok: 20 db transzparens a feliratok magyar fordításával.)	OOK

Az írásvetítő és az írásvetítő transzparensek alkalmazásával a következő dolgozatok foglalkoznak:

[1] Appel Gy.: Alapismeretek a matematikatanítás oktatástechnikai eszközeiről. ELTE Szakmódszertani Közlemények. XI. kötet, 1978.

[2] Bajnok Z.: Írásvetítő algebraórán. Audiovizuális Közlemények. 1976. évi 4. szám.

[3] Balázs S.: Geometria tanítása írásvetítővel. Audiovizuális Közlemények. 1978. évi 1. szám.

[4] Fehér L.: Írásvetítő az általános iskolai matematikaoktatásban. Audiovizuális Közlemények. 1978. évi 1. szám.

[5] Havas S.: Írásvetítő a matematikaórán. Audiovizuális Közlemények. 1976. évi 4. szám.

[6] Nádasi A.: Az írásvetítő transzparensek fajtái. Az OOK kiadványa, 1975.

[7] Németh F.: Írásvetítő geometriaórán. Audiovizuális Közlemények. 1976. évi 4. szám.

[8] Pintér L.-né: Írásvetítő a középiskolai matematika tanításában. Audiovizuális Közlemények. 1975. évi 4. szám.

[9] Seres L.-né: Általános iskolai matematikatanítás írásvetítővel. Audiovizuális Közlemények. 1975. évi 4. szám.

[10] Szilajka J.: Írásvetítő az egyenlő szárú háromszög tanításában. Audiovizuális Közlemények. 1978. évi 1. szám.

[11] Tóth I.: Írásvetítő a középiskolai matematika oktatásában. Audiovizuális Közlemények. 1978. évi 1. szám.

[12] Ugaros L.-né: Írásvetítő a matematika tanításában. Audiovizuális Közlemények. 1978. évi 5. szám.

[13] Virág I.: Írásvetítő transzparenssorozat a középiskolai matematika I., II., III. osztályos anyagához. Tanszerismertető. A TANÉRT kiadványa, 1978.

A Bolyai János Matematikai Társulat versenye matematikatanárok számára

A Bolyai János Matematikai Társulat a matematikatanárok önálló szakmai munkájának kibontakoztatására 1979-től évenként versenyt rendez. A versenyen részt vehetnek az alsó és középfokú oktatási intézményekben működő tanítók és tanárok.

A verseny feladatmegoldásból áll. A 8—10 feladatot minden év júliusában teszi közzé a Versenybizottság A Matematika Tanítása című folyóiratban. (A versenyfeladatok beszerezhetők még a Társulat Rátz László Vándorgyűlésén, valamint a Társulat központjában és helyi tagozataiban személyesen vagy postán. Az utóbbi esetben kérjük egy megcímzett válaszboríték küldését is.)

A 8—10 feladatot azonos témakörből tűzik ki. A Versenybizottság a témaköröket a matematikának olyan fejezeteiből választja ki, amelyeknek ismerete igen jól hasznosítható a korszerű iskolai oktatásban, a tanórai vagy szakköri munkában.

A júliusban kezdődő verseny előtt a Versenybizottság minden évben megjelentet egy 2—3 cikkből álló sorozatot A Matematika Tanítása című folyóiratban, amellyel segítséget kíván nyújtani a verseny-feladatsor megoldásához. E cikksorozat feladatokkal és elméleti összefoglalóval tájékoztatja a versenyen indulni kívánókat az évi témakörökről.

A cikksorozatban megjelent feladatok megoldásának beküldését nem kéri a Versenybizottság. A feladatokat és az elméleti anyagot minden év júliusában a Társulat Rátz László Vándorgyűlésén a résztvevők a cikksorozat szerzőinek irányításával szemináriumi formában dolgozzák fel.

A verseny eredményhirdetése minden év decemberében lesz. A Társulat a versenyen legeredményesebben szereplőket pénzjutalomban részesíti.

BECK JÓZSEF
tudományos segédmunkatárs
MTA Matematikai Kutató Intézet
Budapest

Amőba-játékok

Tapasztalatom szerint a játékok matematikai elemzése a diákok körében mindig osztatlan érdeklődést keltett. Természetesen a népszerű játékok érdekességét éppen az a tény garantálja, hogy ezek teljes matematikai elmélete nem ismert. Ennek ellenére megválaszolható egy sor érdekes kérdés s ennek a cikknek éppen az a célja, hogy az amőba-játék s általánosításai távolról sem lezárt matematikai elméletéből ízelítőt adjon.

Emlékeztetőül: az amőbát elvileg egy végtelen négyzetrácson játsza két játékos (a gyakorlatban persze egy „kockás" füzet is megteszi). A játék abban áll, hogy a játékosok felváltva megjelölnek egy-egy négyzetet a saját jelükkel, O-val, illetve X-szel (innen a játék másik közkeletű neve: OX). Az a győztes, aki először foglal el vízszintes vagy függőleges vagy valamelyik átló irányába eső 5 szomszédos mezőt. A kezdő játékost **I**-sel, a második — lépéshátrányban levő — játékost **II**-sel fogom jelölni. Jelöljük nOX-szal az amőbának azt az általánosítását, ahol a győzelemhez n szomszédos mező lefedése szükséges (tehát az 5OX a közönséges amőba). A 4OX-ban, mint azt némi próbálkozás után mindenki tapasztalhatja, **I**-nek nyerő stratégiája van. Az 5OX-ról semmit sem tudni, így aztán természetes a következő kérdés: van-e egyáltalán olyan nagy n, amire a nOX-ban **II**-nek döntetlen stratégiája volna. Éppen erre válaszol az *1. állítás.*

1. állítás. $n \geqq 12$ esetén a nOX-ban **II**-nek van döntetlen stratégiája.

De mielőtt ennek nekikezdenénk, egy hosszabb kitérőt teszünk. Talán fölmerült az olvasóban az a kérdés is, hogy a nOX-ban lehet-e valamilyen n-re **II**-nek nyerő stratégiája. Megmutatom, hogy ez az eset soha nem következhet be. Ezt indirekt úton bizonyítom, azaz tegyük föl, hogy valamilyen n-re **II**-nek van nyerő stratégiája. Ebből következik, hogy akkor **I**-nek is lenne nyerő stratégiája. Ez a stratégia így nézne ki: ha legelső lépését figyelmen kívül hagyja, akkor már **I** lesz lépéshátrányban **II**-höz képest, ő lesz a „második" játékos, s **II** lépéseire válaszoljon **II** feltételezett nyerő stratégiája szerint. Amennyiben ez a stratégia azt diktálná, hogy éppen oda lépjen, ahová legelőször lépett, akkor persze léphet tetszése szerint, hiszen ezt a mezőt már előzőleg elfoglalta. Ha később valamikor a stratégia szerint oda kellene lépnie, ahová most lépett, akkor persze megint léphet tetszése szerint, és így tovább. A játék *szimmetrikus* volta miatt ez a stratégia **I** számára is nyerő stratégia volna. Ha viszont **I**-nek és **II**-nek egyaránt lenne nyerő stratégiája, akkor amennyiben mindkét játékos ezen nyerő stratégiája szerint játszana, a játéknak két győztese lenne. Ez az ellentmondás igazolja, hogy indirekt feltevésünk, vagyis, hogy **II**-nek van nyerő stratégiája, lehetetlenség, tehát **II**-nek nem lehet nyerő stratégiája.

Fogalmazzuk meg másképpen azt az állítást, hogy II-nek nincs nyerő stratégiája. Ez annak az állításnak a tagadása, hogy II-nek van nyerő stratégiája, másképpen, hogy I tetszőleges lépéseire II tud úgy válaszolni, hogy végül is II győzzön. Ez utóbbinak az a tagadása, hogy I-nek van olyan szisztémája, hogy II akárhogyan is válaszol, mégsem tud győzni, vagyis a végeredmény mindig vagy döntetlen vagy I győzelme lesz. Oda lyukadtunk ki tehát, hogy a nOX-ban I-nek van olyan stratégiája, hogy, bárhogyan is játszik II, a játék végeredménye I számára döntetlennél rosszabb nem lesz. Röviden: a nOX-ban I-nek van döntetlen stratégiája. Vegyük észre, hogy milyen érdekes felismeréshez jutottunk! Megmutattuk, hogy a nOX-ban I-nek *létezik* döntetlen stratégiája, de a legcsekélyebb elképzelésünk sincsen arról, hogy például $n=5$, vagyis a közönséges amőba esetében, egy ilyen konkrétan hogyan is nézhet ki. Sőt, vannak olyan vélemények, hogy a közönséges amőba esetén ilyen döntetlen stratégiát, a lehetséges lépéskombinációk óriási száma miatt, soha nem is fogunk találni (pedig létezik).

Fel kell hívnunk a figyelmet arra, hogy annak bizonyítása során, miszerint a nOX-ban II-nek soha sincs nyerő stratégiája, döntő módon kihasználtuk a játék szimmetrikus voltát. Nem szimmetrikus játékok esetén persze II-nek is lehet nyerő stratégiája (lásd például a 2. állítást).

Térjünk vissza az *1. állításra*. A bizonyításhoz előkészületekre lesz szükségünk.

2. állítás. Tekintsük azt az 1-dimenziós játékot, ahol a két játékos, I és II, felváltva foglalnak le egész számokat a számegyenesen (ugyanazt a számot kétszer nem vehetik ki) s I éppen akkor győz, ha számai között valamikor előfordul 3 darab egymásutáni. Ha I-nek ez soha nem sikerül, akkor II nyer. Ebben a játékban II-nek van nyerő stratégiája.

A *2. állítás* bizonyítása a következő. Megadjuk II nyerő stratégiáját: ha I utoljára l-et vette ki, akkor

(*a*) ha $l-1$ még nincs elfoglalva, úgy II kiveszi $(l-1)$-et;

(*b*) ha $l-1$ már el van foglalva, de $l+1$ még nincs, úgy II kiveszi $(l+1)$-et;

(*c*) ha $l-1$ és $l+1$ is el vannak foglalva, akkor II tetszőlegesen választhat.

Indirekt úton bizonyítjuk, hogy ez valóban nyerő stratégia. Tegyük fel, hogy I valamikor elfoglalta az $l, l+1, l+2$ számokat. Időrendben először nem vehette ki sem $l+1$-et, sem pedig $(l+2)$-t, hiszen mindkettő bal oldali szomszédja benne van az $\{l, l+1, l+2\}$ halmazban, így a fenti stratégia szerint II ezt rögtön elfoglalta volna. Így I időrendben először l-t vette ki. I-nek időrendben másodszor tehát $(l+1)$-et vagy $(l+2)$-t kellett kivennie. De mindkét eset lehetetlen, mert ha $(l+1)$-et vette volna ki időrendben másodszor, úgy a fenti stratégia alapján II rögtön utána elfoglalta volna $(l+2)$-t, ha pedig $(l+2)$-t vette volna ki időrendben másodszor, úgy II rögtön utána $(l+1)$-et foglalta volna el. Ellentmondáshoz jutottunk, tehát indirekt feltevésünk helytelen volt, s így a *2. állítás* bizonyításával készen vagyunk.

3. állítás. A négyzetrács négyzeteibe elhelyezhetjük úgy a V (vízszintes), F (függőleges), FÁ (főátló), MÁ (mellékátló) betűket, hogy bármelyik vízszintes, függőleges vagy átló irányú négy szomszédos négyzetből álló szakaszon lesz olyan négyzet, melybe a szakasz irányának rövidítését írtuk.

A kívánt „megbetűzést" úgy végezhetjük el, hogy kijelölünk a négyzetrácson egy 4×4-es darabot s ezt megbetűzzük az ábra szerinti módon, majd pedig ezt kiterjesztjük periodikusan az egész négyzetrácsra. Ez utóbbit úgy kell érteni, hogy ha egy négyzet már meg van betűzve, akkor vízszintes és függőleges irányba eső negyedik szomszédai kapják

F	MÁ	F	V
V	FÁ	MÁ	FÁ
MÁ	F	V	F
FÁ	MÁ	FÁ	V

ugyanazt a betűt. Az olvasóra hagyjuk annak tisztázását, hogy így éppen egy kívánt tulajdonságú betűzéshez jutunk.

Ennyi előkészület után most már rátérhetünk az *1. állítás* bizonyítására. Először vegyük észre, hogy a *2. állítás* igaz marad akkor is, ha a játék nem egy, hanem akárhány *diszjunkt* egyenesen folyik. Ugyanis, ha **II** mindegyik egyenesen szimultán módon a *2. állítás* bizonyításában megadott nyerő stratégiát játssza, akkor **I** egyik egyenesen sem tud elfoglalni három szomszédos rácspontot. Mármost a *3. állítás* éppen arra szolgál, hogy a négyzetrácsot diszjunkt „egyenesek" összegére bontsuk. Ez így történik: induljunk ki egy, a *3. állítás* szerint létező megbetűzésből. Definiálni fogjuk a V egyenes fogalmát: vegyünk fel a négyzetrácson egy vízszintes egyenest, s tekintsük csak azokat a mezőit, melyekbe a fenti megbetűzéskor a V jelet írtuk. Ezek a mezők az egyenesen általában nem lesznek szomszédosak, de ennek ellenére ezekre is természetes módon definiálhatjuk a szomszédosság fogalmát egyszerűen úgy, hogy egy mező szomszédai azok, melyek az egyenesen valamelyik irányban hozzá a legközelebb fekszenek. Összegezve: V egyenesnek nevezzük egy vízszintes egyenes V-vel megjelölt mezőit a most megadott lineáris elrendezéssel együtt („hézagos" egyenes). Teljesen analóg módon definiáljuk az F egyenes (függőleges) FÁ egyenes (főátló-irányú) és MÁ egyenes (mellékátló-irányú) fogalmát. A *3. állítás* szerint így a négyzetrácsot felbonthatjuk *páronként diszjunkt* V egyenesek F egyenesek FÁ egyenesek és MÁ egyenesek összegére. Ezek után ismertethetjük **II**-nek azt a stratégiáját, mely számára a nOX-ban $n \geqq 12$ esetén döntetlent biztosít. **II** játssza mindegyik X egyenesen (X=V vagy F vagy FÁ vagy MÁ) szimultán módon a *2. állításbeli* nyerő stratégiát. Ezzel a stratégiával **II** el tudja érni, hogy mindegyik X egyenesen bármelyik három szomszédos négyzet egyike az övé legyen (lásd *2. állítás*). Viszont egy X irányú egyenes [X=F (függőleges) vagy V (vízszintes) vagy FÁ (főátló) vagy pedig MÁ (mellékátló)] négy szomszédos négyzetéből legalább az egyik a megfelelő X egyeneshez tartozik (lásd *3. állítás*), így 12 szomszédos mezőbe legalább három X egyenesen szomszédos mező esik, így ezek egyikét a fenti stratégia értelmében **II** kivette. Ebből következik, hogy a nOX-ban ($n \geqq 12$) **II** számára ez a stratégia döntetlen stratégia. Ezzel az *1. állítást* bebizonyítottuk.

Általánosítsuk az amőbát. Nevezzük $(k, l)-n$OX-nak azt a változatot, ahol **I** egyszerre k darab, **II** pedig egyszerre l darab mezőt foglal el a négyzetrácson (az $(1, 1)-n$OX tehát ugyanaz, mint a nOX). Most megvizsgáljuk, hogy az *1. állítás* bizonyításának módszerével mit lehet kihozni a $(k, k)-n$OX-ra. Ennek érdekében a *2. állítás* előtt definiált 1-dimenziós játékot kell értelemszerűen általánosítani.

2*. állítás. Tekintsük azt az 1-dimenziós játékot, ahol **I** egyszerre több számot is lefoglalhat, de sohasem többet, mint k darabot, másrészt **II**-nek minden soron következő lépésében ugyanannyi számot kell kivennie, mint amennyit **I** előzőleg kivett. **I** pontosan akkor nyer, ha számai között valamikor előfordul n darab egymás utáni. Ha ez soha nem sikerül neki, akkor persze **II** nyer. Ebben a játékban $n=k+2$ esetén **II**-nek van nyerő stratégiája.

Bizonyítás: Megadjuk **II** nyerő stratégiáját. Ha **I** utoljára az $l_1, l_2, \ldots, l_p$ ($p \leqq k$) számokat vette ki, akkor **II** a $t_1, t_2, \ldots, t_p$ számokat veszi ki, ahol a t_i-kre a következő szabályok teljesülnek

(*a*) ha l_i-1 még nincs elfoglalva, akkor t_i legyen l_i-1;
(*b*) ha l_i-1 már el van foglalva, de l_i+1 még nincsen, úgy t_i legyen l_i+1;
(*c*) ha l_i-1 és l_i+1 egyaránt foglaltak, akkor t_i tetszőleges lehet.

Indirekt úton bizonyítjuk, hogy ez a stratégia jó. Tegyük fel, hogy **I** valamikor elfoglalta az $l, l+1, \ldots, l+k+1$ számokat. Jelölje H azokat a számokat, melyeket **I** az $\{l, l+1, \ldots, l+k+1\}$ halmazból időrendben először vett ki. Megmutatom, hogy H mindössze egy számból, mégpedig l-ből áll. Az nyilvánvaló, hogy $l \in H$, hiszen máskülönben H minimális elemének bal oldali szomszédja $\geqq l$, így ezt **II** a fenti stratégia szerint rögtön elfoglalta volna, ami ellentmondás. H elemei legyenek $h_0=l, h_1, h_2, \ldots, h_r$ $(r \leqq k-1)$. Ha $r \geqq 1$, akkor elvileg két eset lehetséges

1. eset: $h_i=l+i$ $(1 \leqq i \leqq r)$,
2. eset: valamilyen i-re $h_i>l+i$.

Az 1. eset lehetetlen, mert akkor $(l+r+1)$-et rögtön elfoglalná **II**, viszont a 2. eset is lehetetlen, mert akkor a legelső olyan i-re, hogy $h_i>l+i$, a h_i-1 üres lenne, így ezt **II** a következő lépésében elfoglalná. Tehát $\{l, l+1, \ldots, \ldots, l+k+1\}$-ből **I** időrendben először egyedül l-t vehette ki. Jelölje $l_1<l_2<\ldots$ $\ldots<l_q$ $(q \leqq k)$ azokat a számokat, melyeket **I** időrendben másodszor vett ki $\{l, l+1, \ldots, l+k+1\}$-ből. Elvileg itt is két eset lehetséges.

1. eset: $l_i=l+i$ $(1 \leqq i \leqq q)$,
2. eset: valamilyen i-re $l_i>l+i$.

Az első eset nem következhet be, mert akkor $(l+q+1)$-et **II** rögtön utána kivenné, viszont a 2. eset sem következhet be, mert akkor a legelső olyan i-re, hogy $l_i>l+i$, az l_i-1 üres, így ezt **II** a következő lépésében elfoglalná. Ez az ellentmondás végül is indirekt feltevésünk föladásához vezet, így a *2*. állítást* bebizonyítottuk.

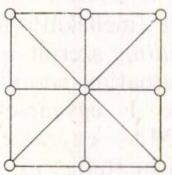
Ezek után már könnyűszerrel igazolhatjuk az *1. állítás* következő általánosítását.

4. állítás. Ha $n \geqq 4k+8$, akkor a $(k, k)-n$OX-ban **II**-nek van döntetlen stratégiája.

Bizonyítás: Az *1. állítás* bizonyításában említett módon bontsuk fel a négyzetrácsot diszjunkt V egyenesek, F egyenesek, FÁ egyenesek és MÁ egyenesek összegére. **II** döntetlen stratégiája a következő: **II** játsza mindegyik X egyenesen (X=V vagy F vagy FÁ vagy pedig MÁ) külön-külön, szimultán módon a *2*. állításbeli* nyerő stratégiát. Ezzel a stratégiával **II** el tudja érni, hogy bármelyik X egyenesen fekvő bármely $k+2$ szomszédos négyzet egyike az övé legyen (lásd *2*. állítás*). Viszont egy X irányú egyenes négy szomszédos négyzetéből legalább az egyik a megfelelő X egyeneshez tartozik (lásd *3. állítás*), így $4(k+2)=4k+8$ szomszédos mezőbe legalább $k+2$ X egyenesen szomszédos mező esik, így ezek egyikét a fenti stratégia értelmében **II** kivette. Ebből következik, hogy a $(k, k)-n$OX-ban $n \geqq 4k+8$ esetén **II** számára ez a stratégia döntetlent biztosít. Így a *4. állítás* bizonyítása kész.

A *4. állítás* bizonyításából kiolvasható az a többlet is, hogy **II** ezzel a stratégiával *meg tudja akadályozni* ellenfelét abban, hogy az elfoglalhasson $4k+8$ szomszédos mezőt. Hogy ez ténylegesen többletet jelent a döntetlen stratégia fogalmához képest, azt a következő feladat illusztrálja.

1. feladat. Két játékos felváltva foglal el pontokat az alábbi 3×3-as ábrán. Az nyer, akinek először sikerül elfoglalnia



valamelyik szakasszal összekötött ponthármast. Igazoljuk, hogy ebben a játékban **II**-nek döntetlen stratégiája van, de nem tudja megakadályozni ellenfelét abban, hogy az elfoglalhasson nyerő ponthármast.

Mint előbb említettem, a $(k, k)-n$OX-ban **II** meg tudja akadályozni ellenfelét abban, hogy az elfoglalhasson $4k+8$ szomszédos mezőt. Mi a helyzet a $(k, l)-n$OX játékban, ahol $k>l$?

5. állítás. $k>l$ esetén a $(k, l)-n$OX-ban **I** minden n-re el tud foglalni n szomszédos mezőt.

Ennek igazolása roppant egyszerű. Vegyünk fel egymás alatti sorokban k^{n-1} darab n hosszúságú vízszintes szakaszt. Az első k^{n-2} lépés során **II** legfeljebb $l \cdot k^{n-2}$ szakaszba tud belenyúlni, viszont **I** az első k^{n-2} lépése során bele tud nyúlni minden, **II** által érintetlenül hagyott szakaszba (hiszen ez alatt $k \cdot k^{n-2}=k^{n-1}$ mezőt foglalhat el). Ezért lesz legalább $(k-l)k^{n-2} \geqq k^{n-2}$ olyan szakasz, melyek mindegyikéből **I** már legalább egyet elfoglalt, de **II** még nem tudott belenyúlni. Ebből a k^{n-2} szakaszból a következő k^{n-3} lépés után marad legalább k^{n-3} olyan, melyek mindegyikéből **I** már legalább kettőt lefoglalt, de **II** továbbra sem nyúlhatott bele. És így tovább, végül marad $k^0=1$ darab olyan szakasz, melyből **I** már legalább $(n-1)$-et lefoglalt, de **II** még egyet sem. Viszont most megint **I** lép, s lefoglalhatja ennek a szakasznak esetleges utolsó szabad négyzetét, amivel a bizonyítás kész.

Az *5. állítás* után kézenfekvő a kérdés, $k>l$ esetén van-e minden n-re **I**-nek nyerő stratégiája a $(k, l)-n$OX-ban (miért nem következik ez az *5. állításból?*). Minden n-re ez megoldatlan probléma, viszont $n>4l+8$ esetén talán az olvasó is meg tud vele birkózni.

2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy $k>l$ és $n>4l+8$ esetén **I**-nek van nyerő stratégiája a $(k, l)-n$OX-ban.

Útmutatás: Az olvasó próbálja meg összeházasítani a *4.* és *5. állítások* bizonyításainak gondolatmenetét.

Visszatérve az *5. állításra,* felmerülhet az a kérdés is, hogy ha **I** minden n-re el tud foglalni n szomszédos mezőt, akkor talán el tud foglalni *végtelen sok* szomszédos mezőt is. A válasz minden (k, l)-játékra tagadó, éppen erről szól a *3. feladat.*

3. feladat. Bizonyítsuk be, hogy $n=+\infty$ esetén a $(k, l)-n$OX játékban **II**-nek döntetlen stratégiája van.

Most megfogalmazzuk a lehető legáltalánosabb formáját az amőba-játéknak, kilúgozzuk belőle az összes esetleges geometriai vonást. Legyen adva egy X alaphalmaz („játéktér") s X n-elemű részhalmazainak egy rendszere („nyerő konfigurációk"), jelölve $\mathcal{F}_n$. Nevezzük $\mathcal{F}_n$(OX)-nak azt a kétszemélyes játékot, ahol **I** és **II** felváltva foglalnak el egy-egy X-beli pontot, s az nyer, akinek először sikerül teljesen lefednie egy $\mathcal{F}_n$-beli halmazt. Ki fog derülni, hogy ilyen általános esetben is lehet érdemleges eredményeket kapni. Két jelölés: egy H halmaz elemeinek számát jelölje $|H|$, továbbá $d(\mathcal{F}_n)$ jelentse $\mathcal{F}_n$ maximális „fokszámát", azaz X minden pontja legfeljebb $d(\mathcal{F}_n)$ darab $\mathcal{F}_n$-beli halmazban van benne, s létezik olyan pont, melyet pontosan $d(\mathcal{F}_n)$ darab $\mathcal{F}_n$-beli halmaz tartalmaz. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban föltesszük, hogy $\mathcal{F}_n$ véges.

6. állítás. Ha $d(\mathcal{F}_n) \leqq \frac{n}{2}$, akkor az $\mathcal{F}_n$(OX)-ban **II**-nek van döntetlen stratégiája.

Bizonyítás: Meg fogjuk mutatni, hogy $\mathcal{F}_n$ minden n-esében kijelölhetünk reprezentáns pontpárokat úgy, hogy különböző n-esekhez diszjunkt párok tartozzanak. Ha ezt már megtettük, akkor **II** döntetlen stratégiája a következő: ha **I** előző lépése során valamely reprezentáns pontpár egyikét foglalta el, akkor **II** válaszként foglalja el a másikat. Ez a stratégia nyilván megfelel a célnak.

Annak igazolásához, hogy a kívánt tulajdonságú reprezentáns pontpárok kijelölhetők, fölhasználjuk a kombinatorika egyik alapvető eredményét, P. Hall tételét. Ez az alábbi kérdéssel foglalkozik: mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy adott $H_1, \ldots, H_r$ halmazok esetén mindegyik H_i halmazban ki tudjunk jelölni reprezentáns k-elemű részhalmazokat úgy, hogy különböző H_i-khez diszjunkt reprezentáns k-asok tartozzanak. Ennek nyilván szükséges feltétele, hogy a halmazok tetszőleges $H_{i_1}, \ldots, H_{i_s}$ részrendszerére teljesüljön a $\left|\bigcup_{j=1}^{s} H_{i_j}\right| \geqq k \cdot s$ feltétel ($\left|\bigcup_{j=1}^{s} H_{i_j}\right|$ jelöli a $\bigcup_{j=1}^{s} H_{i_j}$ halmaz elemeinek számát). Ugyanis a $H_{i_1}, \ldots, H_{i_s}$ halmazok páronként diszjunkt reprezentáns k-asai már magukban kitesznek $k \cdot s$ elemet. Mármost P. Hall tétele éppen azt állítja, hogy ez egyben elégséges feltétel is.

Visszatérve a *6. állítás* bizonyítására, P. Hall tétele értelmében már csak annak ellenőrzése maradt hátra, hogy $\mathscr{F}_n$ tetszőleges $\{A_1, \ldots, A_s\}$ részhalmazára teljesül az $\left|\bigcup_{i=1}^{s} A_i\right| \geqq 2s$ feltétel. Ehhez először egy jelölés: $x \in \bigcup_{i=1}^{s} A_i$ esetén jelölje $d(x)$ azoknak az A_i $1 \leqq i \leqq s$ halmazoknak a számát, melyek tartalmazzák x-et. Az olvasóra bízzuk az alábbi nyilvánvaló azonosság igazolását:

$$\sum_{x \in \bigcup_{i=1}^{s} A_i} d(x) = \sum_{i=1}^{s} |A_i| = s \cdot n.$$

Mivel $d(x) \leqq d(\mathscr{F}_n)$ minden $x \in \bigcup_{i=1}^{s} A_i$ esetén, így

$$\frac{n}{2}\left|\bigcup_{i=1}^{s} A_i\right| \geqq d(\mathscr{F}_n)\left|\bigcup_{i=1}^{s} A_i\right| \geqq$$

$$\geqq \sum_{x \in \bigcup_{i=1}^{s} A_i} d(x) = s \cdot n,$$

tehát $\left|\bigcup_{i=1}^{s} A_i\right| \geqq 2s$. Ezzel a Hall-tétel feltételének ellenőrzését s egyben a *6. állítás* bizonyítását is befejeztük.

Most definiálni fogjuk a 3-dimenziós nOX játékot. Ehhez a térben egy kockarácsot kell fölvenni, és a játékosok felváltva foglalnak el egy-egy kockát. Az nyer, akinek először sikerül elfoglalnia koordinátatengely irányú vagy lapátló irányú, vagy térátló irányú egyenesen fekvő n szomszédos kockát.

4. feladat. Bizonyítsuk be, hogy elég nagy n-re a 3-dimenziós nOX-ban **II**-nek döntetlen stratégiája van.

Útmutatás: Használjuk fel a *6. állítást.*

Cikkünk legnehezebb (s talán legérdekesebb) eredménye a következő pontos tétel.

7. állítás (Erdős—Selfridge). Ha $|\mathscr{F}_n| < 2^{n-1}$, akkor az $\mathscr{F}_n$(OX)-ban **II**-nek döntetlen stratégiája van. Másrészt minden n-re létezik olyan $\mathscr{F}_n^*$ n-esekből álló 2^{n-1}-elemű halmazrendszer, melyre az $\mathscr{F}_n^*$(OX)-ban **I**-nek van nyerő stratégiája.

Bizonyítás: Legyen $|\mathscr{F}_n| < 2^{n-1}$. Megadjuk **II** döntetlen stratégiáját. Tegyük fel, hogy idáig **I** az $x_1, \ldots, x_i$; **II** pedig az $y_1, \ldots, y_{i-1}$ pontokat vette ki. A stratégia megadása egyenértékű azzal, hogy megmondjuk, **II**-nek hogyan kell kivennie y_i-t. Ez úgy fog történni, hogy minden ponthoz alkalmas módon számértéket rendelünk s y_i a maradék (egyik) legértékesebb pontja lesz. Most rátérünk az értékelésre. Az $\mathscr{F}_n^i$ halmazrendszer úgy áll elő $\mathscr{F}_n$-ből, hogy kidobjuk belőle azokat az $A \in \mathscr{F}_n$ halmazokat, melyek az $y_1, \ldots, y_{i-1}$ pontok közül legalább egyet tartalmaznak, továbbá a megmaradó halmazokból „levágjuk" az $x_1, \ldots, x_i$ pontokat, azaz

$$\mathscr{F}_n^i = \{A \setminus \{x_1, \ldots, x_i\} : A \in \mathscr{F}_n \quad \text{és}$$

$$A \cap \{y_1, \ldots, y_{i-1}\} = \emptyset\}.$$

(Emlékeztetem az olvasót néhány ismert jelölésre: ha A és B halmazok, akkor

$A \setminus B$ jelöli A-nak azokat az elemeit, melyek B-ben nincsenek benne, $A \cap B$ jelöli A és B közös elemeit, $|A|$ jelöli A elemeinek számát, s végül $\emptyset$ jelöli az üres halmazt, tehát azt, melynek nincsenek elemei. Tehát $|\emptyset|=0$ és $A \cap B=\emptyset$ éppen azt jelenti, hogy A és B diszjunktak.)

Egy y pont *értéke* legyen $\varphi_i(y)$, ahol

$$\varphi_i(y) = \sum_{A:\, y \in A \in \mathcal{F}_n^i} 2^{-|A|}.$$

Tehát, mint már említettük, y_i legyen a maradékból az, melyre $\varphi_i(y)$ maximális.

Hátra van annak igazolása, hogy ha **II** ezzel a stratégiával játszik, akkor **I** nem tud teljesen lefedni $\mathcal{F}_n$-beli halmazt. Ehhez kell egy újabb jelölés:

$$\varphi_i = \sum_{A \in \mathcal{F}_n^i} 2^{-|A|}.$$

Segédtétel: $\varphi_{i+1} \leqq \varphi_i$ $i = 1, 2, \ldots$.

A segédtételből könnyen következik, hogy **II** számára ez a stratégia döntetlent biztosít. Ugyanis ha **I** például az i-edik lépésben teljesen le tudna fedni egy $A \in \mathcal{F}_n$ halmazt, akkor $\mathcal{F}_n^i$-nek eleme lenne $A \setminus \{x_1, \ldots, x_i\}=\emptyset$, az üres halmaz, így fennállna $\varphi_i \geqq 2^{-|\emptyset|} = 2^0 = 1$. Ez viszont lehetetlen, hiszen definíció szerint

$$\varphi_1 = \sum_{A \in \mathcal{F}_n} 2^{-|A \setminus \{x_1\}|} \leqq |\mathcal{F}_n| 2^{-n+1} < 1,$$

és a segédtétel miatt $\varphi_i \leqq \varphi_1$.

A segédtétel bizonyítása pedig egyszerűen abból áll, hogy végiggondoljuk, $\mathcal{F}_n^{i+1}$ miben különbözik $\mathcal{F}_n^i$-től. A változás az, hogy kidobjuk azokat a halmazokat, melyek tartalmazzák y_i-t, továbbá a megmaradókból levágjuk x_{i+1}-t, azaz

$$\varphi_{i+1} \leqq \varphi_i - \varphi_i(y_i) + \varphi_i(x_{i+1}) \leqq \varphi_i.$$

Fölhasználtuk, hogy $\varphi_i(y_i) \geqq \varphi_i(x_{i+1})$, ami nyilván igaz $\varphi_i(y_i)$ maximalitása miatt.

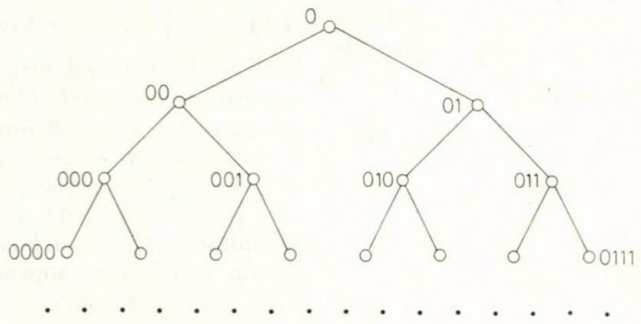
Végül megkonstruáljuk $\mathcal{F}_n^*$-t. Alaphalmaza legyen az alábbi $2n-1$ elemű halmaz:

$$\{a_0, a_1^0, a_2^0, \ldots, a_{n-1}^0, a_1^1, a_2^1, \ldots, a_{n-1}^1\}.$$

$\mathcal{F}_n^*$ elemei legyenek az összes lehetséges $\{a_0, a_1^{i_1}, a_2^{i_2}, \ldots, a_{n-1}^{i_{n-1}}\}$ alakú halmazok, ahol az $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ számok felvehetik a 0 és 1 értékeket. Nyilván $|\mathcal{F}_n^*| = 2^{n-1}$. Az **I** játékos nyerő stratégiája a következő: első lépéseként kiveszi a_0-t, s utána mindig úgy jár el, hogy ha **II** utoljára $a_k^{i_k}$-t vette ki, akkor ő kiveszi $a_k^{1-i_k}$-t. Ezzel a **7. állítás** bizonyítása teljesen kész.

5. feladat. Adjunk meg minden n-re olyan $\mathcal{F}_n^{**}$, $\mathcal{F}_n^*$-tól különböző, n-esekből álló 2^{n-1} elemű halmazrendszert, melyre az $\mathcal{F}_n^{**}$(OX)-ban **I**-nek nyerő stratégiája van (vagyis nem $\mathcal{F}_n^*$ az egyetlen extremális tulajdonságú rendszer).

Útmutatás: A következő halmazrendszer megfelelő lesz. Készítsük el az összes lehetséges 0-val kezdődő, legfeljebb n hosszúságú 0—1 sorozatot. Ezek lesznek a halmazrendszer „pontjai". n darab ilyen 0—1 sorozat akkor alkotja a halmazrendszer egyik elemét, ha közülük bármelyik kettőre teljesül, hogy egyik



a másik folytatása. Például

$$\{(0), (0, 1), (0, 1, 1), (0, 1, 1, 0),$$

$$(0, 1, 1, 0, 1), \ldots\} \in \mathcal{F}_n^{**}.$$

Befejezésül alkalmazni fogjuk a *7. állítást* egy gráfjátékra. Először néhány szót a gráfokról. Egy gráf *pont*okból s közülük néhány pontpárt összekötő *él*ekből áll. Egy gráfot *teljes*nek nevezünk, ha bármely két pontja össze van kötve. Egy gráf *komplementeré*ben éppen azok az élek vannak benne, melyek a gráfból hiányoznak.

8. állítás. Tekintsünk egy N pontú teljes gráfot s két játékos, **I** illetve **II**, felváltva foglaljanak el egy-egy élt. Az győz, akinek először sikerül elfoglalnia k pontú teljes részgráfot (azaz ha valamelyik k pont összes pontpárját összekötő $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$ él mindegyike az ő tulajdonában van). Ebben a gráfjátékban $N \leqq 2^{k/2}$ esetén **II**-nek döntetlen stratégiája van, viszont $N \geqq \binom{2k-2}{k-1} = \frac{(2k-2)!}{[(k-1)!]^2}$ esetén **I**-nek van nyerő stratégiája.

Mivel $\binom{2k-2}{k-1}$ nagyságrendileg $\frac{4^k}{\sqrt{k}}$ körül van (pontos becslést kaphatunk a jól ismert Stierling-formula segítségével: $k! \approx \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}$), így N-re nézve elég nagy tartományban nem tudunk semmit.

Rátérünk a *8. állítás* bizonyítására. Az $N \leqq 2^{k/2}$ eset bizonyításában alkalmazni fogjuk a *7. állítást*. $\mathcal{F}_n$ elemei legyenek az N pontú teljes gráf összes lehetséges k pontú teljes részgráfjának élhalmazai. Tehát $n = \binom{k}{2}$ és $|\mathcal{F}_n| = \binom{N}{k}$. A *7. állítás* értelmében elég azt ellenőrizni, hogy

$$|\mathcal{F}_n| < 2^{n-1}, \quad \text{azaz}$$

$$\binom{N}{k} < 2^{\binom{k}{2}-1}, \quad \text{ahol} \quad N \leqq 2^{\frac{k}{2}}.$$

Ez viszont nyilvánvaló, hiszen

$$\binom{N}{k} \leqq \frac{N^k}{k!} \leqq \frac{2^{\frac{k^2}{2}}}{k!} < \frac{2^{\frac{k^2}{2}}}{2^{\frac{k}{2}+1}} = 2^{\binom{k}{2}-1}.$$

A másik eset, $N \geqq \binom{2k-2}{k-1}$, igazolásához fölhasználjuk a gráfelmélet egy híres eredményét, Erdős—Szekeres tételét. Ez azt állítja, hogy $N \geqq \binom{2k-2}{k-1}$ esetén minden N pontú gráfra teljesül az alábbi két állítás egyike:

(*a*) a gráf tartalmaz k pontú teljes részgráfot,

(*b*) a gráf komplementere tartalmaz k pontú teljes részgráfot.

Ennek fölhasználásával azután már könnyen adódik, hogy gráfjátékunkban $N \geqq \binom{2k-2}{k-1}$ esetén **I**-nek van nyerő stratégiája. Ugyanis csak két lehetőség van: vagy **I**-nek van nyerő stratégiája, vagy pedig **II** meg tudja akadályozni **I**-et a győzelemben, más szóval **II**-nek van döntetlen stratégiája. Ez az utóbbi eset viszont $N \geqq \binom{2k-2}{k-1}$ esetén nem következhet be. Ha ugyanis **II**-nek volna döntetlen stratégiája, akkor — lévén, hogy játékunk teljesen olyan típusú, mint a nOX, s így a cikk elején elmondottak itt is érvényesek, tehát **I**-nek mindenképpen van döntetlen stratégiája — ha mindkét játékos a döntetlen stratégiáját játszaná, akkor a játék végeredménye döntetlen lenne, vagyis egyik játékos sem tudna lefedni k pontú teljes részgráfot. Viszont $N \geqq \binom{2k-2}{k-1}$ esetén az Erdős—Szekeres-tétel értelmében valamelyik játékosnak mindenképpen le kell fednie k pontú teljes részgráfot. Ez az ellentmondás igazolja, hogy csak az az eset következhet be, hogy **I**-nek van nyerő stratégiája.

Vegyük észre, hogy ez a bizonyítás semmit sem szólt arról, hogy **I** nyerő stratégiája konkrétan hogyan is néz ki. Erről fogalmunk sincs.

IRODALOM

P. Erdős és J. L. Selfridge: On a combinatorial game, J. Combinatorial Theory, Ser. A., 14 (1973), 298—301.

P. Erdős és Gy. Szekeres: Combinatorial problem in Geometry, Compositio Math., 2 (1935), 463—470.

A. W. Hales és R. I. Jewett: On regularity and positional games, Trans. Amer. Math. Soc., 106 (1963), 222—229.

P. Hall: On representatives of subsets, J. London Math. Soc., 10 (1935), 26—30.

Hall és Erdős—Szekeres tételéről olvasni lehet szinte mindegyik magyar nyelven megjelent kombinatorikai tárgyú könyvben is. Megemlítem még a matematika-tagozatos osztályok számára írt négykötetes tankönyv harmadik kötetében levő gráfelmélet fejezetet.

POGÁTS FERENC
főiskolai adjunktus
Budapest

Kételyek és aggályok

A címben jelzett érzések *dr. Korányi Erzsébet: Matematika I. osztály* (Tankönyvkiadó, 1979.) tankönyvének olvasásakor támadtak bennem, talán azért, mert hitemben mélyen csalatkoztam. Óvakodom attól, hogy a szerzőt szembesítsem a könyvének bemutatásakor (Köznevelés, XXXV. évf. 30. szám) kifejtettek megtestesülésével, a tankönyvvel.

Elkerülhetetlen azonban szembenézni olyan — a tankönyvben lelhető — súlyos és kevésbé súlyos fogyatékosságokkal, szakmai tévedésekkel, pontatlanságokkal, fogalmazásbeli pongyolaságokkal, didaktikai hibákkal, amelyek vitathatatlanok (s persze a vitathatókra sem árt odafigyelni), és amelyek keresztezik a szerző jó szándékát, célját, talán helyrehozhatatlanul.

Íme!

1. Nagyon ritka-e az érintőnégyszög a négyszögek halmazában? A könyv szerint igen (299. oldal), pedig ez nagy tévedés, akkor is, amikor ezt „bizonyítja". Gondolatmenetével analóg ez a „bizonyítás" is: A természetes számok között *nagyon kevés* a prímszám, mert ha a szám 2-es számjegyre végződik, akkor csak egy ilyen prím van.

2. Az előbbi hibás szemlélet és ismeret vezethette tévútra a szerzőt mindannyiszor, valahányszor egy halmaz valódi részhalmazáról kijelenti, hogy emez a kisebb számosságú, noha ekvivalens amazzal (26., 85., 98., 199., 246., 284., 287. és 329. oldalak). „A körnek kétannyi pontja van, mint a félkörnek, mert az átmérőre tükrözve a félkör pontjainak száma megkettőződik."

Nota bene: Nem szokás a testeket határoló *felületet* lapok egyesítésének mondani (26. oldal), hiszen a lap szó általában síkidomot jelöl. Egyébként a szerző maga is gömb*felületről*, henger*felületről* beszél, sőt a fejezet címe is: PONTOK, VONALAK, FELÜLETEK!

A vonalakról is szólva kérdéses, hogy a kocka éleit (és általában a lineáris alakzatokat) a görbék vagy az egyenesek közé kell-e sorolnunk.

3. A 6.12. PÉLDA (283—284. oldal) magyarázata — az előbb említett hibás szemlélet miatt — a szerző szándékával (4. oldal) ellentétben, helytelen a felvetett kérdésre.

A KCL $\sphericalangle$ nem azért rossz, mert nagyon kicsi. Ettől még végtelen sok (kontinuumnyi) irányú lövés talál a ka-

puba. (Arról nem is szólva, hogy C-hez közel van olyan D pont, amelyre $KDL\sphericalangle > KBL\sphericalangle$!). Annus feltételei sem nehezebbek Bea feltételeinél, hiszen mindkettőnek ugyanannyi (kontinuumnyi) irányú rúgása talál célba. Mégis miért olvasható, hallható a sporthírekben: „nehéz, rossz szögből talált a kapuba"? Ui. a kaput kapus védi, aki ha érti a dolgát, akkor „elállhatja a szöget", azaz kilépve a gólvonalról olyan kicsi (de még mindig kontinuumnyi irányt tartalmazó) szöget hagy szabadon, amelyet csak kivételes rúgótechnikájú játékos tud kihasználni, és az sem mindig.

4. Az előzőnél is fájóbb a 6.18. PÉLDA (303. oldal), amely azt sugallja egy későbbi bizonyításrészlettel együtt (305. oldal), hogy a térbeli centrálszimmetria mozgással realizálható. E példa szerint pusztán úszkálással elérhető, hogy jobb kezünk (lábunk) bal kéz (láb) legyen stb. Törvényszerű, hogy a 229. ábra is egészen rossz: Az A és Á jelű alakok hátsó fele felénk néz, holott Á hasát kellene látnunk. A másik két pár rajza sem különb, az E, É, illetve I, Í párok ugyanolyan oldali keze néz felénk.

5. Elfogadhatatlan az a mód, ahogyan a szerző vezeti el az olvasót az irracionális szám „fogalmához" (107., 108. és 116. oldal). Milyen számok a véges vagy a (végtelen) szakaszos tizedes törtek? Vannak-e vegyes szakaszos (végtelen) tizedes törtek? Ezek milyen számok?

A könyvből ezekről alig tudunk meg valamit, vagy hamis információkat szerezhetünk. A vegyes szakaszos tizedes törtek talán nem is léteznek, mert sehol sincs utalás rájuk, s a 6.12. PÉLDA számai is ezt támasztják alá.

A 70. ábra teljesen hamis képet ad a véges, a szakaszos tizedes törtek és a racionális számok, illetve a tizedes törtek halmazainak kapcsolatáról, még akkor is, ha a szerző bizonyította (vagy említette) volna azt az általa itt is (!) és később is felhasznált tényt, hogy minden véges vagy (tiszta, illetve vegyes) szakaszos tizedes tört két egész hányadosa. Tehát (az ábra jelöléseivel) helyesen:

$$V \subset S, \quad Z \subset S \quad \text{és} \quad Q \subseteq S \subset T.$$

Ezek után természetes, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális voltának igazolása logikailag (többszörösen is!) hibás (116. oldal). Ha ui. „$\sqrt{2}$ nem írható tört alakban", akkor talán felírható (tiszta vagy vegyes) szakaszos tizedes tört alakjában, ezért nem lehet irracionális a könyv definíciója szerint sem. A $\sqrt{2}$-t „mégis számnak kell tekintenünk, hiszen egy szakasz hosszáról van szó". A baj csak ott van, hogy *előbb* kellett meglennie a valós számok halmazának (benne $\sqrt{2}$-nek és társainak), s csak *ezután* volt rendelhető minden szakaszhoz egyértelműen egy valós szám a szakasz hosszaként.

Még egyet: Véleményem szerint a szerzővel együtt kénytelenek leszünk a magasabb osztályokban is beérni az irracionális koordináták közelítő, racionális értékeivel, ellentétben a 116. oldal utolsó mondatában tett „engedménnyel".

6. „Mi a polinom?" olvassuk a 197. oldalon. A szerző itt felesleges és elhibázott kísérletet tesz a polinom és a polinomfüggvény definíciójára. Az olvasható szöveg e fogalmak egyezőségét sugallja, nem pedig éles, elvi különbségüket. (Mit mond — tapasztalat hiányában — egy 14—15 éves diáknak a „határozatlan" definiálatlan fogalma? Hol fogja hasznát látni az *egyhatározatlanú polinom jól* definiált fogalmának?)

A két fogalom közti lényegi különbséget az egyenlőség definíciójában találhatnánk meg, de ilyennek híre-hamva sincs! A polinom helyes értelmezés mellett formális kifejezést jelent, amelynek *nem lehet* helyettesítési értékét venni, ugyanakkor a polinomfüggvény éppen a helyettesítési értékekkel definiált függvény. Ennélfogva értelmetlenek a 200—207. oldalakon kiemelten szereplő tudnivalók.

Azt is jó tudnunk, hogy a polinom definíciója kevés a polinomműveletek el-

végzéséhez (a valós számoknál megfigyelt azonosságok alkalmazásával). Ehhez e műveleteket is definiálni kell (198. oldal).

7. A természetes számok műveleti tulajdonságai *nem* igazolhatók, lévén ezek definitív tulajdonságaik. A 81. oldal ábrái tehát semmit sem igazolnak, funkciójuk csakis a tulajdonságok szemléltetése lehet.

8. Érthetetlen a szerző álláspontja a 6.24. PÉLDA kapcsán szerkesztendő *ABC* háromszögről. „Meg lehet-e most már szerkeszteni az *ABC* háromszöget?" A válasz: „Nem, de egy vagy akár sok ilyent megszerkeszthetünk!"

Tekintsünk el most az idézetben rejlő logikai ellentmondástól, és gondoljuk meg, hogy (végtelen) sok gyökű egyenletek (egyenletrendszerek, nyitott mondatok) megoldásáról is mondhatnánk: „Nincs gyöke, de egy vagy akár sok gyöke van." Tehetjük, hiszen egy szerkesztési feladat megoldása mindig ekvivalens egy egyenletrendszer megoldásával.

Hiányos, pontatlan és ezért rossz definíciókat találunk számos helyen. Emiatt a kúpszeletek közé kerül a szakasz, a félegyenes, a szakasz híja egyenes, az egyenes stb. (71., 72., 359., 362. oldalak). A hiperbola *egyetlen görbe,* két ággal.

Az *a* jelentése szerepel a 88. oldalon, de nem a definíciója, viszont a 4.20. PÉLDA e (nem létező) definícióra utal.

Az ellipszis tengelyszakaszai, a kör húrja és a háromszög középvonala *nem* e lemezek belsejében halad (71., 250., 313. oldal).

A hasáb és a gúla definíciója (251. oldal) megengedi, hogy hasáb, illetve gúla legyen az is, ami különben nem az. Mi a kettős felület (305. oldal), és mi szükség van elképzelésére?

Ha „egy állításból hiányzik egy vagy több szó", nem minden esetben juthatunk nyitott mondathoz, különösen akkor nem, ha az állítmány (a predikátum) vagy az összes szó hiányzik (362. oldal). Ha a trapéznak csak egy középvonala van (360. oldal), akkor nem négyszög, hiszen ennek két középvonala van. További lelőhelyek találhatók például a 34., 51., 63., 82. és 363. oldalakon.

Figyelmetlenség is okozhatta hamis állítások a 76., 143., 145., 180., 215. és 278. oldalakon találhatók.

A 4.2. PÉLDA feltételeiből nem következik a 128. oldal 2. számú következtetése. Rejtélyes az is, hogy az eredetien értelmes Andrea miért nem találhatja meg az összes bijekciót T és K között (Megjegyzések: β).

„Nem változik meg a nyitott mondat igazsághalmaza, ha mindkét oldalhoz ugyanannyit hozzáadunk." (183. és 189. oldal.)

Így az $\frac{1}{X} \leqq \frac{1}{X}$ és a $0 \leqq 0$ ekvivalensek lesznek? „Minden síknégyszög külső szögeinek összege 360°" (248. oldal). Ennek igazához definiálni kellene konkáv szög kiegészítő (és mellék-) szögét!

A metrikus adatokkal szerkesztett egybevágó alakzatokat *nem* tekinthetjük különbözőknek (különben, ha van megoldás, *mindig* végtelen sok van), ezért a 6.15. PÉLDÁ-nak nem lehet két megoldása.

A 298. oldal utolsó mondata szerint pl. szerkeszthető olyan érintőnégyszög, amelyben

$$AB = AD = 2, \ \alpha = 120° \quad \text{és} \quad r = \sqrt{3}.$$

Nem érthetünk egyet:

— A 45., 46. és 63. oldalakon található diszkussziónak „egybeesés" esetével, mivel a számnevek egy-egy halmazszámosságot jelölnek, ezért két pont, két egyenes *mindig két különböző* objektumot jelent. Beszélhetünk viszont „két, nem feltétlenül különböző" pontról, egyenesről stb., de *csakis* ekkor jogos az „egybeesés" esetének vizsgálata.

— Az 5.13. PÉLDA megoldásának ellenőrzésével, illetve az erről tett megjegyzéssel. Mire jó az előző oldalon ismertetett mérlegelv, ha nem alkalmazhatjuk? (Talán sajtóhiba, de e mérlegelv

megfogalmazásában a $<$ reláció helyett $\leqq$ kell, már csak az említett példa miatt is.)

Az ellenőrzésről: Nem derül ki (sem itt, sem máshol), hogy erre az eljárásra mikor, miért van szükség. Logikai vagy csak szubjektív kötelezettség?

— Az 5.14. PÉLDA két megoldásával, mert ezek egyike sem alkalmazza a 192. oldal utolsó, vastag betűs azonosságát.

— A 6.16. PÉDA *a)* részének második felszólításával, ha nem hívjuk fel a figyelmet arra a veszélyre, amely a szükséges feltételeknek elégséges feltétellé való „kinevezésében" rejlik. Egyébként ugyanez a veszély fenyeget nyitott mondatok megoldásakor (és ezért logikai szükségszerűség bizonyos esetekben az ellenőrzés), szerkesztési feladatokban, ha elmulasztjuk annak bizonyítását, hogy az adott eljárással szerkesztett alakzat a kívánt tulajdonságú.

A töltelékszavak túlzott használata miatt kérdezem:

— Egy ponthalmaz mikor nem „jellegzetes" (2.5. PÉLDA)?

— Mit jelent a „nem korlátlanul megfordítható" művelet (86. oldal)?

— Mi értelmük van az „általánosabb formájú négyszög", „általános téglalap" és az „általános háromszög" fogalmaknak (297., 302. oldal, 133. ábra)?

— Mit jelent „a kocka mint testnek, egységben való elmozdulása" (331. oldal)?

— Egy rossz módszer miért 1. módszer (339. oldal)?

— Miért „az adatok elhelyezése biztosítja, hogy mindig létezik ilyen kör (308. oldal)"?

Elhagytam volna az olyan kijelentéseket, buzdításokat, mint: „jó, ha van... (134. oldal)", „Tanuld meg az első 20 természetes szám négyzetét! (159. oldal)", „az olvassa el, aki szereti a logikus következtetéseket (300. oldal)", vagy amilyenek még a 60., 71., 95., 101. stb. oldalakon olvashatók. Az üres halmaz részhalmaz voltának „igazolása" után szükségtelen az olvasó győzködése (20. oldal).

Nem célszerű a matematika egyes ágaiban folyó kutatásokat, alkalmazásokat a legfontosabb stb. jelzővel ellátni (például 248. és 260. oldal), mert esetleg nem is igaz.

Ennyit azokról a fogyatékosságokról, amelyeket el kellene tüntetni tüzetesebb átnézés után javítással, átdolgozással, kollektív bölcsességgel, annál is inkább, mert nagyobb részük a könyvben kiemelt helyen szerepel.

A tankönyv felépítése — a tantervi anyag feldolgozása — nem tartalmazhat sok újat a korábbi tankönyvekhez képest. Munkáltató jellegét nem a „Számítsd ki...", „Készíts...", „Szerkeszd meg..." stb. felszólítású feladatok adják, hiszen ilyen ismérvekkel minden tankönyv munkáltató. Sokkal munkaigényesebb a könyv kínálta jelrendszer, amelynek elsajátítása, következetes, szigorú alkalmazása és alkalmaztatása a formalizmus veszélyét hordozza magában, elfedve a lényeget: gondolatokat kell ébresztenünk, gondolatrendszert kell adnunk; s nem vagyok biztos abban, hogy ehhez mindig „cifra szolga" szükséges. Az algoritmusok, eljárásmódok elsajátíttatásának akkor van értelme, ha olyan *gondolkodásmódok* birtokába jutunk, amelyek gyarapításához amazok nélkülözhetetlenek.

Tudom, hogy nehéz tankönyvet írni, lehetetlen eleget tenni minden várakozásnak, de a modern szemléletű tankönyvhöz nem elég a jó szándék és a jelrendszer. A jót jól: ez a legmodernebb, és csak ez biztosíthatja az elődök színvonalának meghaladását!

DR. RÉDLING ELEMÉR
főiskolai docens
KKVMF SZI, Székesfehérvár

A geometriai transzformáció fogalmának kialakításáról

I. A transzformáció fogalma

A függvény fogalma a középiskolai matematikaanyag egyik központi fogalma, amely fontos a geometriában is, hiszen a geometriai transzformációkat is függvényeknek tekintjük.

Elöljáróban megemlítjük, hogy a geometriai transzformációkkal kapcsolatos elnevezések használata még nem egységes a szakirodalomban. Ezért előre közöljük az elnevezések általunk használt változatát.

Ha valamely A ponthalmaz (tárgyhalmaz, értelmezési tartomány) minden P pontjához (tárgypont) *egyértelműen* hozzárendeljük egy B ponthalmaz egy-egy P' pontját (képpont), akkor *geometriai transzformációt* — röviden: *transzformációt* — értelmezünk. (Lásd: [3], 39. oldal!) A P' pontok C halmazát értékkészletnek (képhalmaznak) nevezzük. A C tehát a B-nek (nem feltétlenül valódi) részhalmaza. Azt is mondjuk, hogy az A halmazt a B halmaz*ba* képezzük le. Ha tudjuk, hogy a C ponthalmaz egyenlő a B-vel, akkor azt is mondjuk, hogy az A halmazt a B halmaz*ra* képezzük le. (A ponthalmazok körében most a transzformáció és az egyértelmű leképezés kifejezéseket azonos értelemben használjuk.)

Ha a B az A részhalmaza, akkor az A-t *önmagába* képeztük le. Ha tudjuk, hogy a képpontok C halmaza egyenlő az A-val, akkor az A *önmagára* való leképezéséről beszélünk.

II. A transzformációk tanításának néhány nehézsége

A középiskolában a transzformációk fonalán haladó geometriatanítás lépett előtérbe. A transzformációk tanításában biztató eredményeket értünk el, amelyek főként az *alkalmazások* sokrétűségében mutatkoznak.

A transzformációk tanításában azonban tovább kell lépnünk: el kell érnünk, hogy a tanulók a transzformációkat *függvénynek* tekintsék. Ezáltal világosabb kép alakulhat ki a tanulókban a valós függvényekről is. (Analóg példa: a tízes számrendszer fogalmát igazán csak azok értik meg, akik megismerkedtek *más alapú* számrendszerekkel *is*.) Mindez megkönnyítheti egy általánosabb függvényfogalom kialakítását is.

Ahhoz, hogy előbbre léphessünk a transzformációk tanításában, figyelembe kell vennünk a nehézségeket, problémákat. *Ebben a cikkben is ilyen problémákat elemzünk.*

Az elemzésből *következtetéseket vonunk le,* és ezek alapján néhány olyan javaslatot, ötletet fogalmazunk meg, amelynek *segíthetnek a nehézségek áthidalásában.*

Cikkünkben csak vázolni tudjuk ennek az igen sokrétű problémakörnek *néhány* fontos összetevőjét. Egy részletesebb tárgyalást pl. a [11] alatt említett munkában találhatunk.

A transzformációk tanításának egyik alapvető problémája, hogy a *tanulók* jelentős hányadának a geometriai transzformációk témakörében *nem alakulnak ki kellő tisztaságú fogalmai.* Különösen *e téren* sok még a tennivaló. Nem is könnyű feladat meláttatni a tanulókkal például azt, hogy a *ponttranszformációkat is függvénynek tek*

jük. Új tanterveink bevezetésekor indokoltnak látszik, hogy ezt a problémakört alaposabban is megvizsgáljuk.

A tanítási tapasztalatok elemzéséből kiderül, hogy a középiskolai tanulók jelentős hányada számára a transzformáció nem több, mint az *„alakzatok átvitele"*, vagy pedig az alakzatok eltoltjának, elforgatottjának stb. megszerkesztése. Ezekben a tanulókban tehát nem érlelődött meg a transzformációnak — mint ponthoz pontot rendelő függvénynek — a fogalma.

Más tanulók felfogják ugyan a transzformáció fogalmát, de a sík, illetve a tér önmagára való leképezéseinek tárgyalásakor az értelmezési tartományt és az értékkészletet a füzetükben lerajzolt ponthalmazokra (alakzatokra) *szűkítik le*.

Vannak természetesen olyan tanulók is, akik helyesen fogják fel a transzformáció fogalmát. Számukra pl. a sík (illetve a tér) középpontos tükrözése olyan függvényt jelent, amelynek értelmezési tartománya (és értékkészlete is) a teljes pontsík (illetve az egész ponttér), és bármely tárgypontnak meg tudják határozni a képét.

Érdemes számba venni *a transzformációs szemlélet fejlődését gátló* fontosabb *tényezőket*.

A geometriai transzformációk tárgyalását megelőzően a tanulókban bizonyos szinten már kialakul a függvény fogalma. Ez most azonban elsősorban a *valós függvény* fogalmához kötődik. Egy olyan fogalom terjedelmének bővítése, amely bizonyos mértékig már „megszilárdult", nem könnyű feladat. A kialakult fogalomhoz való kötődés ugyanis többnyire erősebb, mint az asszimilálódásra való képesség.

A transzformációkkal kapcsolatos tananyag *szokásos felépítéséből* is adódnak nehézségek. A hagyományos tárgyalásmódban ugyanis már kezdetben végtelen ponthalmazok leképezéseivel foglalkoznak, pedig a végtelen ponthalmazok, s az ezeken értelmezett transzformációk felfogásához megfelelő absztrakciós szint elérése szükséges. A nehézségeket tovább növeli, hogy a végtelen ponthalmazokat azonnal önmagukra képezik le. Így azután nem meglepő, hogy gyakran „egybemosódik" a tárgypont és a képpont, illetve az értelmezési tartomány és az értékkészlet fogalma.

Nehezíti a transzformációs szemlélet fejlődését, hogy a tananyag szokásos felépítésében *elsőnek* mindjárt a *fizikai mozgásból* származtatható transzformációkat tárgyalják. (Így például a síkbeli tengelyes tükrözés is a síknak a tengely körüli 180°-os elforgatásából származtatható.) Pedig a transzformációk gondolatkörében még járatlan tanulóknak nagy nehézséget jelent *a fizikai mozgás fogalmáról leválasztani a megfelelő geometriai fogalmat*.

Fokozza a nehézségeket az is, hogy *nem alakult még ki egyértelmű terminológia*, hiszen a transzformációk elnevezésére többjelentésű szavakat használunk. Ilyen például az „eltolás" szó is. Ez alapjelentésében folytonos mozgást jelent. De ugyanezzel a szóval jelölünk egy transzformációt, valamint egy konstrukciós eljárást is (az alakzat „eltoltjának" megszerkesztését).

A tananyagban gyakorta adódik olyan feladat, amelynek megoldásához *transzformációk kompozícióját* kell elképzelni a tanulóknak *egyetlen* transzformációként. (Példaként említjük meg az egybevágósági és a hasonlósági alapesetek igazolását. Itt többnyire transzformációk szorzatával feleltetjük meg az egyik alakzatnak a másik alakzatot.) Tehát közvetett függvényről van már szó, amelynek felfogásához a középiskola I. és II. osztályában — a transzformációk tanulásának időszakában — még hiányzik a megfelelő „háttér". Két transzformáció összetételével a transzformációk adott halmazának két eleméhez rendelünk hozzá egy elemet. De ezek az elemek maguk is magas szintű absztrakciók eredményei, és kompozíciójuk elképzelése még magasabb szintű absztrakciót igényel. Megfigyelhető, hogy a transzformációk összetételének fogalmát nagyon nehéz kialakítani végtelen ponthalmazok kapcsán.

Mindezek jól mutatják, hogy a transzformációk tanításának problémái jelentős mértékben *pszichológiai problémák*. A tananyag felépítésének megtervezésekor tehát figyelembe kell vennünk a pszichológiai szempontokat is. Új középiskolai tanterveink előírják a tananyag felépítését *egységesebbé* tevő fogalmak keresését, alkalmazását (lásd például: [1], 393. oldal!). E fogalmak ismerete nélkül ugyanis nem alakulhat ki egységes, átfogó kép a matematikáról. Ilyen fogalom például a *függvény*, ezért a transzformáció is. Éppen ezért nem elégedhetünk meg azzal, hogy az átlagos képességű tanulók csupán „alakzatok áthelyezéseként", vagy pedig szerkesztési utasítások összességeként fogják fel a transzformációkat.

III. A transzformációk témakörének egy lehetséges felépítése

Az előzőkben felvázoltuk a transzformációk tanításának néhány problémáját. A nehézségek áthidalása több irányú kutatómunkát igényel. Most néhány ötletet, javaslatot vetünk fel a megoldáshoz.

Az elmondottakat figyelembe véve úgy véljük, hogy ha a geometriai transzformációk tanításában előbbre kívánunk lépni, akkor elsősorban a tananyag szokásos *felépítését célszerű megváltoztatnunk*. Nagyon hasznos lenne az is, ha kialakulna egy *egyértelmű terminológia*. Emellett fontosnak tartanánk azt is, ha megfelelő *összhang* alakulna ki a *valós* függvények és a *transzformációk tanításában* is. A középiskolában érdemes lenne például a transzformációk tárgyalását *párhuzamosan indítani* a valós függvényekkel

A továbbiakban a transzformációk középiskolai tananyagának *felépítésére* vonatkozóan vetünk fel néhány gondolatot. (Cikkünkben a javasolt felépítéseknek csupán a vázát adjuk meg, egy részletesebb tárgyalásmód például a [11] alatt említett munkában található meg.)

Első lépésben *véges ponthalmazok leképezéseivel* célszerű foglalkozni. A véges ponthalmazok a tanulók számára áttekinthetőbbek, „kézzel foghatóbbak", mint a végtelen halmazok. Így bizonyos fogalmak (például a ponthalmazok leképezése, a transzformációk összetétele, fixpont, inverz leképezés) előkészítésére, „érlelésére" a véges ponthalmazok alkalmasabbak, mint a végtelen ponthalmazok.

A második lépésben már rátérhetünk a *végtelen* ponthalmazok leképezéseinek tárgyalására. Most előbb olyan transzformációkat célszerű tanulmányozni, amelyek esetén a tárgyhalmaz még *nem egyenlő* a képpontok halmazával. Ilyen transzformáció *a tér merőleges vetítése* is (a tér bármely pontjához hozzárendeljük a képsíkon levő merőleges vetületét). Ez a transzformáció *nem* egy-egyértelmű, továbbá nem távolság- és szögtartó leképezés. Az egyenes képe sem feltétlenül egyenes (a vetítő egyenes képe egy pont). Így a merőleges vetítés az egybevágósági transzformáció fogalmának kialakításakor és tulajdonságainak megállapításakor mint „ellenpélda" szerepelhet.

A következő lépésben rátérhetünk már a *végtelen ponthalmazok önmagukra* történő leképezéseinek vizsgálatára. Itt most elsősorban a sík és tér egybevágósági, illetve hasonlósági transzformációinak tanítására gondolhatunk.

Az egybevágósági leképezések közül először olyant célszerű feldolgozni, amely *nem* származtatható fizikai mozgásból. Ilyen transzformáció a *térnek síkra*, illetve a *térnek pontra vonatkozó tükrözése* is. E transzformációk fogalma *nem kötődik* a folytonos mozgás képzetéhez, most *nem kell tehát leválasztani a geometriai fogalmat a fizikai mozgás fogalmáról.*

Ezt követően tárgyalhatjuk már a *mozgással* származtatható egybevágósági leképezéseket (eltolás, pont körüli elforgatás stb.). Ebben a felépítésben a tanulóknak

lényegesen könnyebb „leválasztani" a mozgásról a megfelelő geometriai fogalmat, mint a szokásos felépítésmódban (hiszen ezt most megfelelően előkészítettük).

Az eddig tárgyalt transzformációk összevetésével kialakítható az *egybevágósági transzformáció,* majd az *alakzatok egybevágóságának* fogalma is.

A mondott transzformációkhoz kapcsoltan különböző geometriai témakörök dolgozhatók fel (tételek bizonyítása, feladatok megoldása, fogalmak kialakítása, a geometria tárgyalásában alkalmazható módszerek elsajátítása). E témakör részletesebb feldolgozását is például a [11]-ben találhatjuk meg.

További ismeretanyag a hasonlósági transzformációval, illetve a tengelyes affinitással kapcsolatosan tárgyalható.

Befejezésül a következőket említjük meg. A szokásos tananyag általában csak *egyenestartó* transzformációra korlátozódik, s ezek közül is csupán a legspeciálisabbakat (egybevágóság, hasonlóság) tartalmazza. Ezért a tanulók egy általános fogalom helyett csak egy izolált transzformáció-fogalommal ismerkednek meg (vö: [5], 36. oldal!). Ha viszont a transzformációk tanítását a véges ponthalmazok leképezéseinek vizsgálatával indítjuk, akkor a tanulók a nagyon speciális egyenestartó transzformációk szűk köréből is kitekinthetnek. Az efféle kezdést ezért is tartjuk hasznosnak.

IRODALOM

[1] *A gimnáziumi nevelés és oktatás terve* (Tankönyvkiadó, 1978.)
[2] *A szakközépiskolai nevelés és oktatás terve* (Oktatási Minisztérium, 1978.)
[3] HAJÓS GY.: *Bevezetés a geometriába* (Tankönyvkiadó, 1972.)
[4] HOLLAI M.: *A transzformációkra alapozott geometriai fogalmak fejlődése és kapcsolataik a matematika más területeivel* (ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei VIII., 1975.)
[5] KÁRTESZI F.: *Lineáris transzformációk* (Tankönyvkiadó, 1974.)
[6] KÁRTESZI F.: *A geometriatanítás korszerűsítéséről* (Tankönyvkiadó, 1972.)
[7] LASZTÓCZI GY.: *A gimnázium új matematika-tantervének ismertetése* (A Matematika Tanítása, 1976/1.)
[8] PELLER J.—RÉDLING E.: *A tanulók tevékenységének tervezése és irányítása II.* (Az ELTE Matematikai Szakmódszertani Csoportjának kiadványa, 1973.)
[9] RÉDLING E.: *A geometriai transzformációk bevezetése* (Tolna megyei Pedagógus Továbbképzési Intézet, 1977.)
[10] RÉDLING E.: *Egybevágósági transzformációk* (Tolna megyei Pedagógus Továbbképzési Intézet, 1978.)
[11] RÉDLING E.: *Geometriai transzformációk* (Tankönyvkiadó, 1980.)

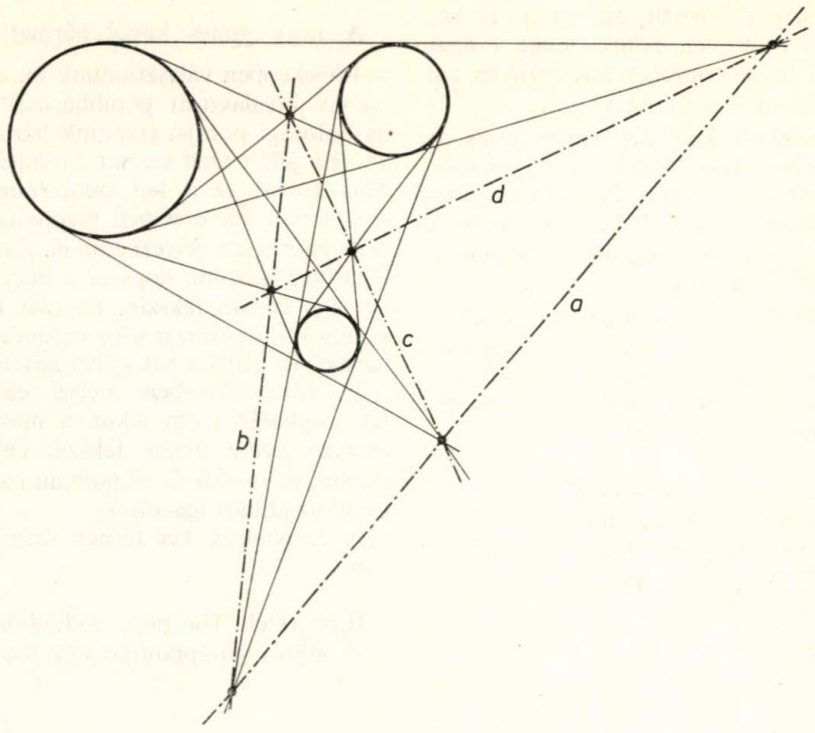
FITOS LÁSZLÓ
főiskolai docens, Nyíregyháza
Bessenyei György Tanárképző Főiskola

Néhány gömb hasonlósági pontjaira vonatkozó tételek

A síkgeometriából ismertnek tételezzük fel két kör külső és belső hasonlósági pontjának fogalmát, továbbá a következő két tételt:

1. tétel. Ha adott három különböző középpontú és sugarú kör, akkor megszerkesztve két-két kör külső hasonlósági pontját, három, *egy* egyenesbe eső pontot kapunk. (Lásd az ábra „*a*" egyenesét!)

2. tétel. Ha adott három különböző középpontú és sugarú kör, akkor a közülük kiválasztható bármely két körpár belső hasonlósági pontja és a harmadik körpár külső hasonlósági pontja *egy* egyenesre illeszkedik. (Lásd az ábra *b, c, d* egyenesét!)



(Menelaosz tételével való bebizonyításuk megtalálható: Érdekes matematikai gyakorló feladatok II. Geometria című Középiskolai Szakköri Füzet, 373. feladat, 150—151. oldalán; térgeometriai bizonyításuk pedig Vigassy Lajos: Síkmértani szerkesztések térmértani megoldással című Középiskolai Szakköri Füzet 62—63. oldalán.)

E két tétel térbeli (3 dimenziós) általánosításával kívánunk foglalkozni.

Tudjuk, hogy körnek gömb a térbeli megfelelője, két gömb hasonlósági pontjait pedig ugyanúgy értelmezzük, mint két kör hasonlósági pontjait. Ennek alapján könnyen belátható a következő *segédtétel:* Két nem koncentrikus gömb hasonlósági pontjai megegyeznek a gömbközéppontokra illeszkedő síkok bármelyike által kimetszett két kör hasonlósági pontjaival.

Egyszerű következménye ennek a segédtételnek, hogy a fenti két tétel igaz marad akkor is, ha bennük „kör" helyébe mindenütt „gömb"-öt és „körpár" helyébe „gömbpár"-t teszünk. Jelöljük az így kapott tételeket **1***.-gal és **2***.-gal!

Ha általánosítani akarjuk a fenti két síkmértani tételt, akkor először is az a kérdés vetődik fel, hogy hány gömböt kell vennünk. Mivel a két síkmértani tételben szereplő három kör középpontja háromszöget határoz meg, és a háromszög térbeli megfelelője a tetraéder, ezért négy gömböt kell fölvennünk a térben úgy, hogy középpontjaik egy tetraédert határozzanak meg.

A következő kérdés az, hogy négy ily módon elhelyezett gömbnek hány hasonlósági pontja van. Tudjuk, hogy négy gömb közül kettőt $\binom{4}{2}=6$-féleképpen választhatunk ki, és minden

gömbpárhoz tartozik egy belső és egy külső hasonlósági pont*, tehát a négy szóban forgó gömbnek hat belső és hat külső hasonlósági pontja van.

Figyelembe kell még venni, hogy az *1. tételben* csak külső, a *2. tételben* viszont külső és belső hasonlósági pontok egyaránt szerepeltek. Feltételezhető, hogy így van ez a megfelelő térgeometriai tételek esetén is.

Most már egy kis próbálgatás, kísérletezés után, amit rajzolással végezhetünk, könnyen eljutunk a keresett törvényszerűségekhez. Ezek a következők. Az *1. tétel* megfelelője:

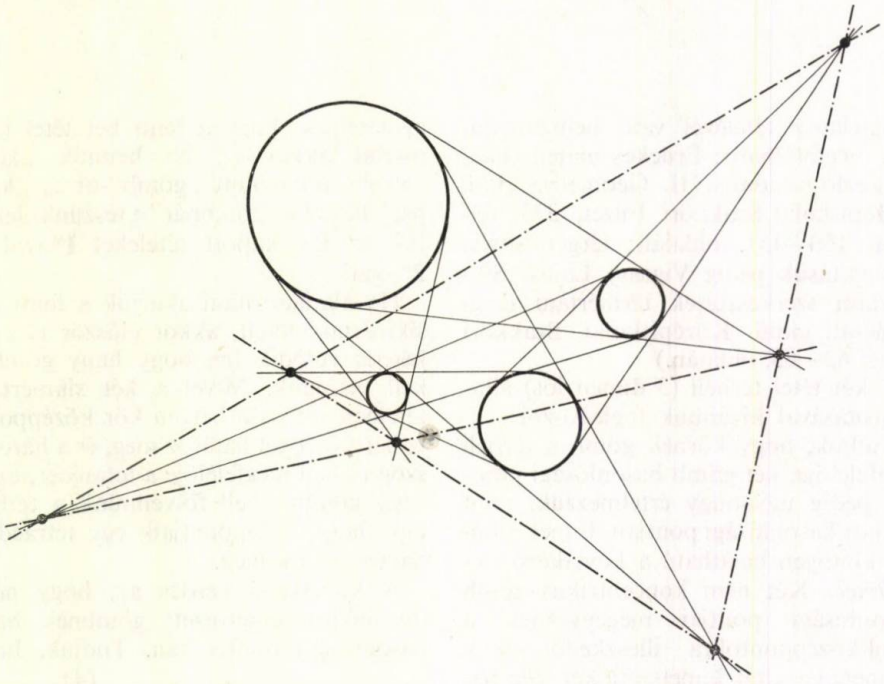
I. tétel. Ha négy különböző sugarú, gömb középpontjai egy tetraéder csúcsai, akkor két-két gömb külső hasonlósági pontját véve, hat, *egy* síkban fekvő pontot kapunk.

Bizonyítás:

A négy gömb közül hármat $\binom{4}{3}=$ =4-féleképpen választhatunk ki, és bármelyik kiválasztott gömbhármas külső hasonlósági pontjai (számuk három) az **1***.-gal jelölt tétel szerint kollineárisak. Más szóval az a hat pont, amelynek *egy* síkban fekvését kell bizonyítanunk, négy egyenesen helyezkedik el. Elegendő tehát azt igazolni, hogy ez a négy egyenes egy síkban fekszik. Ez már sokkal könnyebb, ugyanis a négy egyenes közül bármelyik kettő a hat külső hasonlósági pont valamelyikében metszi egymást, így meghatároz egy síkot, a másik két egyenes pedig benne fekszik ebben a síkban, mert e sík 2—2 pontján megy át. Ezzel az állítást igazoltuk.

A *2. tételnek* két térbeli megfelelője van:

II./a tétel. Ha négy különböző sugarú gömb középpontjai egy tetraédert

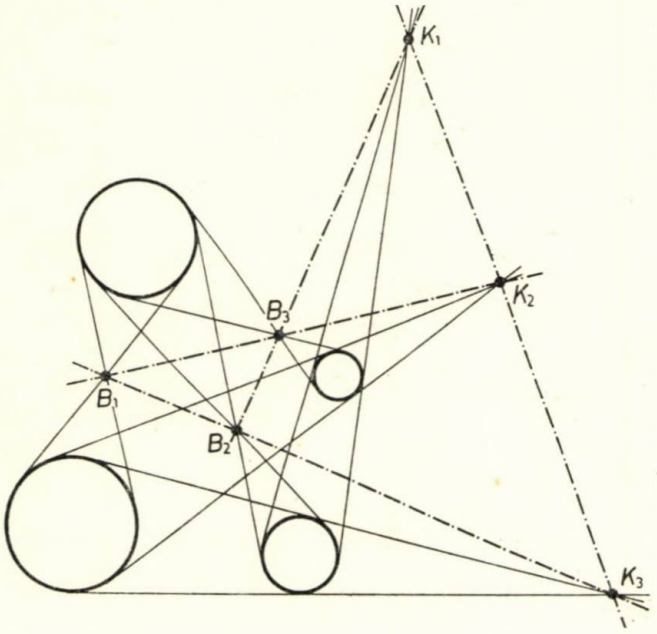


* Amennyiben a gömböknek különböző a középpontjuk és a sugaruk. (Szerk.)

határoznak meg, akkor a tetraéder bármelyik lapja oldalainak meghosszabbításain levő három külső hasonlósági pont és az ehhez a laphoz mint alaplaphoz tartozó oldaléleken levő három belső hasonlósági pont *egy* síkba esik.

Jelöljük a tételben szereplő külső hasonlósági pontokat K_1-gyel, K_2-vel, K_3-mal, a belsőket B_1-gyel, B_2-vel B_3-mal! Az **1***. tétel szerint K_1, K_2, K_3 kollineáris, a **2***. tétel szerint pedig B_1, B_2, K_3; B_2, B_3, K_1; B_1, B_3, K_2 mind-

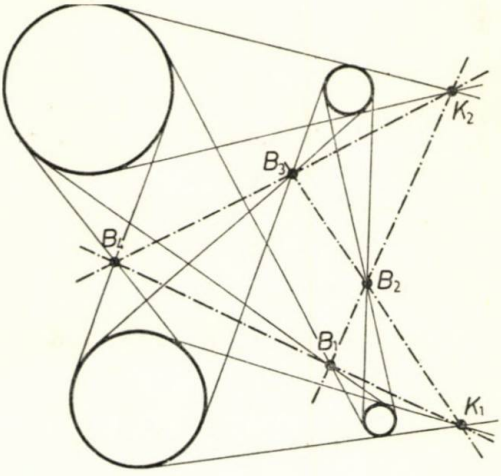
Bizonyítás:



egyike kollineáris ponthármas. Látjuk, hogy a szóban forgó hat pont itt is négy olyan térbeli egyenesre illeszkedik, amelyek páronként metszik egymást, tehát e négy egyenes egy síkba esését ugyanúgy bizonyíthatjuk, ahogyan azt az *I. tétel* esetén tettük.

II./b tétel. Ha négy különböző sugarú gömb középpontjai egy tetraédert határoznak meg, akkor bármelyik két szemközti tetraéderél meghosszabbításán levő külső hasonlósági pont és a többi négy élen levő belső hasonlósági pont, összesen tehát ez a $2+4=6$ pont szintén *egy* síkon helyezkedik el.

Bizonyítás:



Az ábrán a tételben szereplő külső hasonlósági pontokat K_1-gyel és K_2-vel, a belsőket pedig B_1-gyel, B_2-vel, B_3-mal és B_4-gyel jelöltük. A 2*. tétel alapján kollineárisak a következő ponthármasok:

K_1, B_1, B_4: K_1, B_2, B_3; K_2, B_2, B_1

és K_2, B_3, B_4. A bizonyítás a továbbiakban itt is úgy végezhető, mint az előbbi két tétel esetén.

Megjegyzések: (1.) Ha az *1.* és a *2. tételben* a három kör középpontja kollineáris vagy ha az *I., II./a* és *II./b tételben* a négy gömb középpontja komplanáris, akkor az illető tételek állítása triviális.

(2.) Ha két nem koncentrikus kör vagy gömb sugara egyenlő, akkor az euklideszi geometriában nincs külső hasonlósági pontjuk. Ilyenkor a projektív geometriát szoktuk segítségül hívni, ahol a végtelen távoli térelemek „polgárjogot" nyertek. Érdemes megvizsgálni, hogy a cikkben tárgyalt tételek akkor is igazak-e a projektív síkban, illetve térben, ha a bennük szereplő külső hasonlósági pontok közül akárhány a végtelenben van. De ez a téma már túlnő e cikk keretein.

Javasolt szakirodalom

a Tankönyvkiadó kiadványai közül

Fűzve

Dr. Kőhegyiné—Vajda: *Egyéni matematikatanulás osztályközösségben.* Feladatgyűjtemény tanárok számára az általános iskola 8. osztályának matematikaoktatásához (52 681) ..... 16,—

Hámori: *Ismerkedés a komputerrel.* Számítástechnika I. az általános és középiskolai tanulók számára (29 205) ..... 10,—

Kovács Gy.: *Számítógépek technikája.* Számítástechnika III. (29 217) 15,50

Élő matematika 1. Tanulmányok. Szerkesztő: Gádor Endréné (92 347/1) ..... 18,—

Jánossy—Tasnádi: *Élő matematika 2. Valószínűségszámítás* (92 347/2) ..... 6,—

Gergely—Hódi és mások: *Élő matematika 3. A lánctörtektől a számítógépig* (92 347/3) ..... 13,—

Korányi: *Élő matematika 4. Használjuk a differenciálszámítást!* (92 347/4) 18,50

Kovács M.: *Néhány kibernetikai játékgép.* Bevezetés az automaták tervezésébe (29 184) 11,50

Ligeti—Mosoni: *Törd a fejed, érdemes!* Matematikai feladatgyűjtemény az általános iskolai tanulók számára (1908/1) ..... 10,—

Felvételi feladatok: matematika, fizika, szabadkézi rajz. Szerkesztette: Pálfai Pál (8159) ..... 108,—

Péter Rózsa: *Játék a végtelennel. Matematika kívülállóknak* (52 489) ..... 31,—

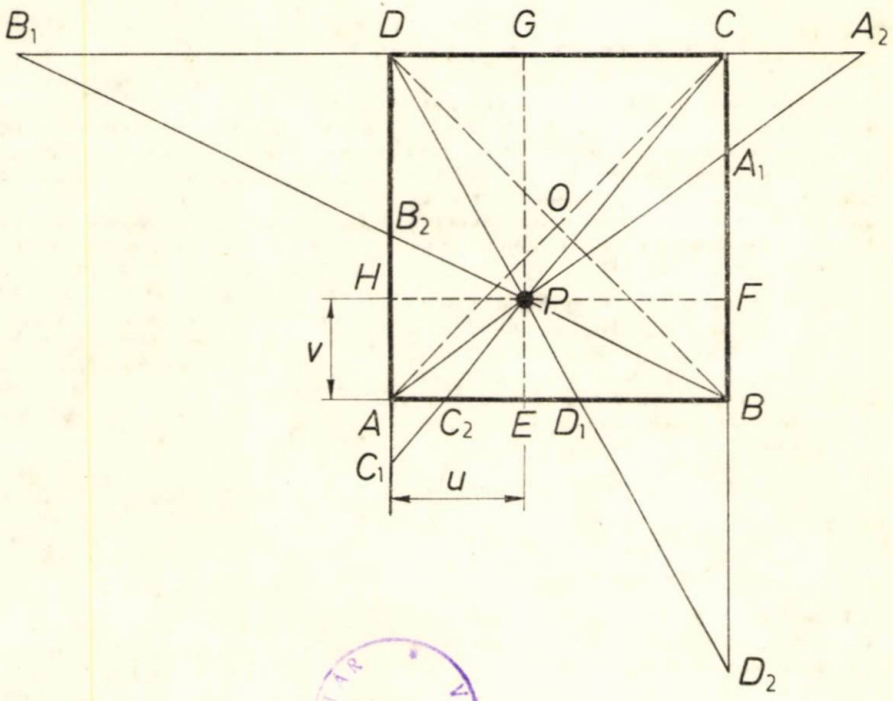
Vigassy L.: *Egybevágósági transzformációk a síkban és a térben* (29 247) 9,50

Beszerezhető
a 17. Pedagógus-könyvesboltban (1053 Bp., Múzeum krt. 3.),
a 44. Könyvesboltban (1052 Bp., Deák F. u. 15.)

INDEX: 25 565

A Matematika Tanítása

Az Oktatási Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



VERSEGHY KÖNYVTÁR SZOLNOK

1980. június * XXVII. évfolyam 3 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

AZ OKTATÁSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS LÁSZLÓ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, REMÉNYI GUSZTÁV, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200.
80-1264 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

ISSN 0461—3902

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél és a Posta Központi Hírlap Irodánál (postacím: Budapest, V., József nádor tér 1. — 1900) személyesen, vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96162 pénzforgalmi jelzőszámra. Előfizetési díj egész évre 27,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 4 50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Balázs László: Az általános iskolák és szakmunkásképző intézetek matematikatanításának koordinálása Heves megyében 65
Dr. Králik Dezső: A függvényfogalom fejlődése Galileitől napjainkig 66
Közlemény a matematikai jelölésekre vonatkozó hatályos országos szabványokról ... 75
Dr. Bognár Jánosné—Dr. Nemetz Tibor: Játék és valószínűség 76
Dr. Varecza Árpád: A számozott pontú fák számáról 85
FELADATOK 89

СОДЕРЖАНИЕ

Балаж, Ласло: Координирование обучения математике в общеобразовательных восьмилетних школах и профтехшколах области Хевеш 65
Д-р Кралик, Дежё: Развитие понятия функции от Галилеи до наших дней 66
Сообщение о действительных всевенгерских стандартах по математическим обозначениям 75
Д-р Богнар, Яношнэ—Д-р Немец, Тибор: Игра и вероятность 76
Д-р Вареца, Арпад: О числе деревьев с пронумерованными вершинами 85
ЗАДАЧИ 89

Helyreigazítás

Lapunk ez évi **2.** számában *Fitos László* cikkének címe sajnálatos módon hibásan jelent meg a 62. oldalon. A helyes cím:

Négy gömb hasonlósági pontjaira vonatkozó tételek

— ahogyan a tartalomjegyzékben is olvasható (mind a három nyelven).

A sajtóhibáért Igen tisztelt Olvasóink szíves elnézését kérjük.

A szerkesztőség

INHALT

Balázs, László: Die Koordination des Mathematikunterrichtes der Grund- und Berufsschulen in Komitat Heves 65
Dr. Králik, Dezső: Die Entwicklung des Funktionsbegriffes von Galilei bis heute 66
Mitteilung über die landgültigen Normen bezüglich der mathematischen Bezeichnungen 75
Frau Dr. Katalin Bognár (geb.: *Vincze*)—*Dr. Nemetz, Tibor:* Spiel und Wahrscheinlichkeit 76
Dr. Varecza, Árpád: Über die Anzahl der Bäume mit numerierten Punkten 85
AUFGABEN 89

BALÁZS LÁSZLÓ
vezető szakfelügyelő
Heves

Az általános iskolák és szakmunkásképző intézetek matematikatanításának koordinálása Heves megyében

Heves megyében az általános iskolákban az 1980/81. tanévtől valamennyi osztályban bevezetésre kerül az ideiglenes matematika-tanterv tanítása. Ugyanakkor a végleges tanterv szerint tanítunk 7. osztályban a megye iskoláinak 5%-ában, 6. osztályban 12%-ában és 5. osztályban 37%-ában.

Az ideiglenes és a végleges tanterv tanítására bentlakásos tanfolyamokon készítettük fel nevelőinket. A tanfolyamok tematikáit úgy állítottuk össze, hogy az új elméleti anyagrészekhez gyakorlati foglalkozásokat kapcsoltunk. Ezeken a gyakorlati foglalkozásokon ismerkedtek meg nevelőink a tankönyvekkel, munkalapokkal, eszközökkel, azok használatával. Minden nevelőt valamennyi évfolyamból felkészítettünk mind az ideiglenes, mind a végleges tanterv tanítására. A felkészítésben nagy segítséget kaptunk az egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Matematika Tanszékétől és közvetlenül Balogh Viktória főiskolai docenstől. Úgy érezzük, hogy felkészítő tanfolyamaink jól sikerültek, nevelőinket jól készítettük fel az új tanterv tanítására.

Nagy várakozással tekintettünk a középfokú oktatásban bevezetésre kerülő új matematika-tantervek megjelenése elé. Nevelőinknek igényként állítottuk azt a szempontot is, hogy úgy készítsék fel tanulóinkat matematikából, hogy azok a szakmunkásképző intézetekben és a középiskolákban is megállják helyüket.

Ezért nagy örömünkre szolgált az a tény, hogy Palásti Tibor, a megyei szakmunkásképző iskolák matematika-fizika szakos szakfelügyelője megkeresett bennünket abból a célból, hogy az új matematika-tantervek tanításának koordinálását egyeztesse az általános iskolai szakfelügyeleti csoporttal. Ugyanakkor Palásti kartárs azt is kérte tőlünk, hogy mondjunk véleményt a szakmunkásképző iskolák tantervi követelményrendszeréről, tantervéről.

Rendelkezésünkre bocsátotta a szakmunkásképző iskolák nevelési és oktatási tervét, valamint az érvényben levő matematika-tankönyveket és -munkalapokat.

Örömmel tapasztaltuk — és ezt Koller Lászlóné A Matematika Tanításában megjelent cikkével is alátámasztotta —, hogy a szakmunkásképző iskolák matematika-tanterve jól illeszkedik az általános iskolák tantervéhez. Ez nemcsak a tantervi tematikából tűnik ki, hanem a nevelési és oktatási tervek feladatainak továbbviteléből is. Felépítettségében is követi az általános iskolai követelményrendszert, amikor megjelöli az optimumot, ezen belül a minimumszintet is. Nagyon egyetértünk azzal a megállapítással, hogy a minimumszintnek az a szerepe, hogy a tananyag belső összefüggéseinek szem előtt tartásával útbaigazítást adjon a nevelőknek, hogy mit szükséges a tanulóknak tudniuk ahhoz, hogy a tanterv további ismereteit megértsék, elsajátítsák.

VERSECHY KÖNYVTÁR SZOLNOK

Koller Lászlóné cikkében foglalkozik az általános iskolai anyag év eleji ismétlésével, rendszerezésével. Megállapításaival egyetértünk. Szakfelügyelői munkakaközösségünk véleménye az, hogy elegendő a 25 óra az év eleji rendszerezésre. Az általános iskolában tanító nevelőknek igen melegen ajánljuk ennek a cikknek az áttanulmányozását (A Matematika Tanítása 1979. évi 5. szám), és a cikkben található felmérő feladatsorozat megoldatását 8. osztályban év végén, főleg azokkal a tanulókkal, akik szakmunkásképző iskolák felé orientálódnak.

Palásti Tibor szakfelügyelő kartárs javaslatára az általános iskolai matematika-fizika szakfelügyelői csoport közös óralátogatásokat szervezett az általános iskolákban is és szakmunkásképző intézetekben is. Ennek érdekében Heves megyében valamennyi szakmunkásképző intézetnek az általános iskolák közül egy-egy társiskolát jelöltünk ki, hogy a szakmunkásképző intézetek és az általános iskolák szakos tanárainak kölcsönös tapasztalatcseréjét még jobban ki tudjuk szélesíteni, illetve el tudjuk mélyíteni. Olyan feladatot is tűztünk ezek elé a társintézmények elé, hogy koordinálják a területi munkaközösségek együttműködését is.

Az együttműködés elmélyítése érdekében az általános iskolai tanári felkészítő tanfolyamokra meghívjuk Palásti Tibor kartársat és a munkaközösségvezetőket.

Úgy érzem, hogy ez az együttműködés szükséges, és elő fogja segíteni tanulóink szakmai fejlődését, ugyanakkor nagyobb számban tudjuk irányítani általános iskolai tanulóinkat a szakmunkásképző iskolák felé.

Együttműködésünket a Megyei Tanács Művelődésügyi Osztálya és a Megyei Pedagógus Továbbképzési Kabinet teljes mértékben támogatja és segíti. Segítségükért ez úton is köszönetünket fejezzük ki. Ugyanakkor köszönetet kell mondanunk Palásti Tibor szakfelügyelő kartársnak azért, hogy igényli az általános iskolai szakfelügyelői csoport segítségét és véleményét az új tantervekkel kapcsolatosan.

DR. KRÁLIK DEZSŐ
tanszékvezető egyetemi tanár
Budapesti Műszaki Egyetem

A függvényfogalom fejlődése Galileitől napjainkig

Az elméleti fizikai kutatások leghatékonyabb segédeszköze a matematika. Pontos, szabatos, kifinomult fogalomrendszere és egzakt számítási módszerei nélkül nem jöhetett volna létre sem a klasszikus fizika, sem a relativitás- és a kvantumelmélet, amely utóbbiaknak nagy matematikai igényei okozták valószínűleg sok, a felsőbb matematikában kevésbé járatos fizikus kezdeti idegenkedését ezekkel a fizikai tudományágakkal szemben.

A matematika tehát nagy segítséget nyújtott és nyújt a fizikai kutatásoknak, de a fizika is fejlődése során igen termékenyítőleg hatott a matematikára, értékes ösztönzéseket adott a matematikának, elősegítette például olyan nagy jelentőségű és absztrakt matematikai tudományág kifejlődését, mint a halmazelmélet. Minden, matematikával és fizikával foglalkozó ember jól tudja azt is, hogy a differenciál- és integrálszámítás, valamint a differenciálegyenletek elmélete fejlődésüket éppen a kialakuló mechanikának köszönhették, amely nélkül az egész matematikai analízis létrejöttét el sem tudjuk képzelni. A matematika és a fizika tehát fejlődésük folyamán kölcsönösen támogatták, ösztönözték egy-

mást, és ez a gyümölcsöző kölcsönhatás fennmarad a két tudomány jövő fejlődésében is.

A fizika fejlődésének köszönheti tudatos kibontakozását a matematikának egyik legfontosabb fogalma, a függvényfogalom is, amely azután belső problematikája által hajtva, egyre szélesedett, egyéb matematikai tudományágakra gyakorolt termékenyítő hatást, és fejlődése folyamán jelentős absztrakciókat is szükségessé tett.

A függvényfogalom időben természetesen régebbre nyúlik vissza, mint az újkori természettudomány kezdete, hiszen például az ókorban végzett terület- és térfogatszámításokban már jelentkezett ezeknek a mennyiségeknek a függősége a szóban forgó geometriai alakzatok lineáris méreteitől. Mégis a függvényfogalom tudatos kibontakozása és felhasználása időbelileg lényegében egybeesett a rendszeres természettudományos megfigyelés és kísérletezés megindulásával, azaz GALILEI munkásságával.

Ha meg akarjuk ismerni a természetet, a természeti folyamatok törvényszerűségeit, akkor meg kell figyelni a folyamatokat, méréseket kell végezni, s így felfedezni a folyamatokat kvantitatíven leíró törvényeket, amelyeknek legegyszerűbb megjelenési formája a matematikai képlet. Valószínűleg a szabadesés megfigyelése vezetett az *első*, természeti folyamatot leíró képlethez, az $s=k\cdot t^2$-hez, amely megadja az eső test útját mint az idő függvényét a leejtés pillanatától kezdve. Ha van v_0 kezdősebesség is, akkor az útképlet bővebb: $s=k\cdot t^2+v_0\cdot t$.

Egyre több képlet került napvilágra a fizikai vizsgálódások során, ezekben a fizikai mennyiségek egymástól való függése kvantitatíven nyilvánult meg. A képletekben világosan jelentkezett a fizikai mennyiségek között fennálló *oksági összefüggés*, úgyhogy a képletek, tehát a legegyszerűbb függvények, a természetben meglevő oksági összefüggések tényleges kifejezői lettek. Ha a képlet folyamatot ír le, a folyamat múltját és jövőjét teljesen meghatározza. Ha *minden* folyamat, legalább elvileg, leírható képlettel, akkor megadva a folyamat képletének paramétereit, a folyamat teljesen *determináltnak* bizonyul, hiszen *bármely* időpontra vonatkozólag kiszámíthatók a szóban forgó függvényértékek, azaz a folyamatra jellemző számadatok. A fizikai folyamatok determináltságát még jobban aláhúzta a Newton-féle erőtörvény. Ennek értelmében, ha ismerjük egy testrendszer egyedeire ható erőket mint a hely és idő függvényeit, továbbá a testrendszer térbeli elrendeződését és az egyes testek sebességét egy konkrét (egyébként tetszőleges) időpontban, akkor a differenciálegyenletek egzisztencia- és unicitástétele szerint a folyamatot szabályozó differenciálegyenletnek vagy -egyenletrendszernek *egyetlen* megoldása van, azaz egyetlen megoldásfüggvény vagy -függvényrendszer létezik, amelynek segítségével a testrendszer koordinátáit és a testek sebességét bármely időpontban kiszámíthatjuk, tehát a rendszer mozgásának múltját és jövőjét egyértelműen ismerjük, a szóban forgó folyamat teljesen determinált. A differenciálegyenletek megoldásfüggvényei így a természeti folyamatok determináltságát fejezik ki.

A Galileivel megindult fejlődés számos függvénykapcsolatot derített fel, sok konkrét függvényt hozott napvilágra. Ezeknél a függvényeknél a független változó (vagy változók) kicsiny megváltozása a függő változó értékében is csak kicsiny változást okozott; ez a tulajdonság visszatükrözte a függvények által leírt természeti összefüggések *folytonosságát*. amelyet maga NEWTON mondott ki: „Natura non facit saltus" (a természet nem csinál ugrásokat). A folytonosságnak ez a szemléletes, intuitív fogalma, tehát hogy az okok kicsiny változása az okozatok kicsiny változását idézi elő, ez tapadt az akkori függvényfogalomhoz. A folytonosság pontos definíciója ekkor még ismeretlen volt, ezt csak sokkal később adta meg CAUCHY. A függ-

vények differenciálhányadosa fontos mutatószám; ez azt mutatja meg, hogy milyen mértékben, milyen erősen reagál a függő változó a független változó kicsiny megváltozására. Ugyanez érvényes a parciális differenciálhányadosokra is, itt a több független változó közül az *egyiknek* a befolyását vizsgáljuk a függő változóra. A differenciálhatóság természetes tulajdonsága a függvényeknek, ez volt az akkori felfogás. Az olyan függvénygörbéket, amelyeknek törési pontjai is vannak, ahol tehát nincs érintő, vagyis az illető helyen nem differenciálható a függvény, nem tekintették igazi függvények görbéinek. Sőt a függvényfogalmat még sokkal szűkebb határok közé fogták: *ez a még* EULER *idejében is uralkodó függvényfogalom a mai analitikus függvény fogalmával azonos.* A függvények Taylor-sorba, illetve Mac-Laurin-sorba fejthetősége szintén természetes tulajdonsága volt a függvényeknek az akkori felfogás szerint. Az ilyen függvények értékrendszere rendkívül szoros belső kapcsolattal rendelkezett: elegendő a független változó egyetlen értékénél ismerni a függvény összes differenciálhányadosát ahhoz, hogy a függvény teljes menetét, teljes egészét ismerjük. Ez a függvényideál, mint tudjuk, csak a komplex változós analitikus függvények esetében valósult meg, amelyek elméletét CAUCHY, RIEMANN és WEIERSTRASS dolgozták ki jóval később. Mint ismeretes, egy komplex változós analitikus függvénynek ismerve a komplex számsík egyetlen (a függvény reguláris) pontjában az összes differenciálhányadosát, vagy pedig *egy* reguláris pont tetszőleges kicsiny környezetében a függvény értékeit, sőt megszámlálhatóan végtelen sok olyan pontban a függvény értékeit, amely pontok konvergálnak a sík egy pontjához, már a függvény teljes menete tökéletesen meghatározott, determinált, ekkor ismeretes a függvény teljes értelmezési tartománya, a szinguláris pontok halmaza, a szinguláris pontok fajtái, hogy ti. mely szinguláris pontok pólusok, melyek lényeges szinguláris helyek, melyek elágazási pontok stb. Tehát a komplex változós analitikus függvények értékei között olyan szoros, determinált a kapcsolat, hogy aránylag egészen kevés függvényérték tökéletesen meghatározza magát a teljes függvényt. Ez a szoros összefüggés a függvényértékek között a matematikai megfelelője a természetben megnyilvánuló szoros ok és okozatösszefüggéseknek, a természeti folyamatok determináltságának.

Ez, az analitikus függvény fogalmát fedő függvényfogalom azonban már az Euler korában végzett elméleti fizikai vizsgálatok számára is kezdett szűknek bizonyulni. D'ALEMBERT-nek a rezgő húrra vonatkozó vizsgálatai végtelen trigonometrikus sorokhoz vezettek, amelyeknél a szóba jövő megoldások ilyen sorok összegeként jelentkeztek. E sorok konvergenciájával akkor még nem foglalkoztak, a konvergenciát a fizikusok kétkedés nélkül feltételezték. Mármost, ha a húrt egyik pontjában kimozdítjuk egyensúlyi állapotából, vagyis a húr kezdeti alakját egy törött vonallal adjuk meg, akkor a megoldásként jelentkező végtelen trigonometrikus sor összege ilyen törött vonallal ábrázolható függvény lesz (végtelen függvénysorok összege, amennyiben létezik, maga is függvény). De ez új jelenség volt; hogyan lehet sinus- és cosinusfüggvények összege olyan függvény, amelynek ábrája törött vonal, vagyis amely valamelyik pontjában nem differenciálható? Sőt azt is észrevették, hogy az ilyen végtelen trigonometrikus sorok összege szakadásos ábrát is mutathat, tehát olyan, eddig függvénygörbének nem tekintett grafikonhoz vezethet, amelynek szakadási helyei a folytonosság megszűnését jelentik. Érdekes, maga Euler nem hitte, hogy végtelen trigonometrikus sorok összege lehet ilyen szakadásos „függvény". Éppen azért nem hitte, mert számára a függvény még mindig lényegében az analitikus függvény volt. Azután FOURIER 1822-ben megjelent, a hővezetésről szóló könyve

már rendszeresen használta ezeket a végtelen trigonometrikus sorokat egyes konkrét hővezetési feladatok megoldására, ahol az ilyen sorok a hővezetés parciális differenciálegyenletének adott kezdeti és peremfeltételeket kielégítő megoldásaiként jelentkeztek.

Fourier hőtani vizsgálatai a régi függvényfogalmat kitágították anélkül, hogy az ilyen végtelen trigonometrikus sorok konvergenciáját megvizsgálták volna. Egyre többen hitték, hogy ezek a végtelen sorok, amelyeket rendszeres alkalmazójukról kezdtek Fourier-soroknak nevezni, egészen tetszőlegesen, tehát önkényesen megadott ábráknak megfelelő függvényeket adhatnak összegül. Természetesen az előírt függvényábráknak, valamint a hozzájuk tartozó — most már — függvényeknek, periodikusaknak kellett lenniük, mert hiszen a sor minden egyes tagja is periodikus. De a 2π hosszúságú vagy esetleg más hosszúságú alapintervallumon belül olyan önkényesen adhatjuk meg a sorba fejtendő függvényeket, ahogyan csak akarjuk. Az ilyen függvények értékei között már nincs szoros összefüggés; például az alapintervallumot felosztható véges sok részintervallumra, és mindegyik részintervallumban előírhatjuk a sorba fejtendő függvény értékeit, azaz lerajzolhatjuk a függvény ábráját úgy, hogy az egyes részintervallumokban rajzolt ábrák teljesen függetlenek egymástól. Tehát az egyik rész-ábrából semmi sem következik a másik rész-ábrára vonatkozólag, s az így megadott függvény értékei az egyes részintervallumok végeinél nem csatlakoznak egymáshoz szükségképpen folytonosan, mégis az ennek megfelelő végtelen trigonometrikus Fourier-sor összegeként a felrajzolt függvényt nyerjük. Anélkül, hogy eleinte tudták volna bizonyítani, ezt elfogadták tényként, ilyen módon lényegesen kitágítva a klasszikus mechanikából származó és Eulerig érvényben levő függvényfogalmat. Csak 1829-ben sikerült igazolni DIRICHLET-nek a függvények egy nagyon tág osztályára, hogy a Fourier-sor a függvényértékhez konvergál, a szakadási pontokban pedig a jobb és bal oldali függvényhatárértékek számtani közepéhez, feltételezve ezeknek a határértékeknek a létezését.

Az új, a régebbinél sokkal tágabb függvényfogalom tehát a végtelen trigonometrikus Fourier-soroknak köszönhető. De hát mi is volt ez a tágabb fogalom? Hiszen a régi függvényfogalom sem volt pontosan definiálva, csupán ösztönösen, intuitíven fogadtak el bizonyos függvénykapcsolatokat függvényeknek. Dirichlet adta meg a valós számegyenesen vagy annak egy részintervallumában definiált valós függvény pontos definícióját. Nyilvánvaló, hogy ehhez a definícióhoz és így a valós függvény szabatos fogalmához a trigonometrikus sorok területén végzett kutatásai vezették. Dirichlet észrevette, hogy az összes eddigi függvény fogalmát is visszakapjuk, beleértve az új sorok összegeiként kapott függvényeket is, ha a következő definíciót vezetjük be: *a valós számegyenes valamely (a, b) intervallumában értelmezett valós függvényen valós számoknak az (a, b) intervallum pontjaihoz történő egyértelmű hozzárendelését értjük.* Ez a hozzárendelés történhet képlet segítségével, végtelen sor összegével vagy bármilyen módon; a lényeges csak az, hogy a hozzárendelés egyértelmű és pontosan definiált legyen, tehát az (a, b) alapintervallum minden egyes pontja esetében legyen egyértelműen meghatározott, hogy ehhez a ponthoz melyik valós számot rendeljük függvényértékként. Az (a, b) alapintervallum lehet esetleg egy $(-\infty, a)$ vagy $(a, +\infty)$ alakú félegyenes, esetleg maga az egész $(-\infty, +\infty)$ számegyenes is. Itt most felvetődik egy egzisztencia-jellegű kérdés: szükséges-e minden egyes függvénynél konkréten megadni a hozzárendelést, tehát konkréten ismerni kell-e azt az előírást, hogy az alapintervallum (a függvény értelmezési tartománya) egyes pontjaihoz melyik függvényértéket rendeljük? Vagy elegendő olyannak lennie

a hozzárendelésnek, hogy az értelmezési tartomány minden egyes pontjára vonatkozóan eleve egyértelműen bizonyos, hogy ehhez a ponthoz egyetlen jól meghatározott valós szám tartozik mint függvényérték? Ezt az utóbbi, jóval lazább értelmezést fogadjuk el általában, és ha létezik ilyen hozzárendelési elv, anélkül, hogy az értelmezési tartomány minden egyes pontja esetében effektíven, ténylegesen meg is tudnánk adni a konkrét függvényértéket, akkor már létezőnek tekintjük az így definiált valós függvényt. A fontos csak az, hogy a hozzárendelési elv, utasítás ne tartalmazzon ellentmondást.

Még a Dirichlet-féle definíció előtt tisztázta Cauchy a folytonos függvény fogalmát. A folytonosság intuitív elképzelését tette pontossá a jól ismert módon: valamely x pontban az $f(x)$ függvény folytonos, ha bármely $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $\delta>0$ szám, hogy az $f(x)$ függvény ingadozása az $(x-\delta, x+\delta)$ intervallumban kisebb ε-nál. Ez a definíció, mint később kiderült, sokkal általánosabb annál, ami intuitíve élt a régebbi matematikusokban, mert ez a definíció fedte fel később, Weierstrass vizsgálatai során a folytonos, de sehol sem differenciálható függvények létezését.

A Fourier-sorok termékenyítő hatása nem ért véget a valós függvény Dirichlet-féle definíciójával.

Felfedezték, hogy folytonos függvény Fourier-sora divergálhat a $(0, 2\pi)$ intervallum egyes pontjaiban. Georg CANTOR a múlt század 70-es éveiben kezdte vizsgálni ezt a jelenséget, és ezzel jutott el a halmazelmélet megalapozásához. A végtelen halmazok egyes jelenségeivel találkozott már BOLZANO még a múlt század húszas éveiben, de nem végzett rendszeres vizsgálatokat ezen a téren. A halmazelmélet, amelyet Cantor a múlt század 80-as éveiben alapozott meg, a függvényfogalomnak és a valós függvények elméletének hatalmas és rohamos fejlődését tette lehetővé.

Még ezelőttre esik Weierstrass kritikai munkássága, amely több, addigi bizonyítás ki nem elégítő voltára mutatott rá. A szólássá vált weierstrassi szigorúság szintén igen jelentős és hasznos volt a matematika további fejlődésére. Weierstrass adott először példát olyan folytonos függvényre, amely a független változó egyetlen értékénél sem differenciálható, ahogyan szokás mondani: sehol sem differenciálható. Weierstrass példája egy egyenletesen konvergens Fourier-sor összege; azóta több, egyszerűbb példát is adtak ilyen folytonos függvényre, többek között VAN DER WAERDEN. Jellemző a Weierstrass-példa hatására és a régi, szemléletes függvényfogalom begyökeresedettségére a nagy francia matematikusnak, HERMITE-nek mondása: „Borzalommal fordulok el ettől a siralmas fekélytől: függvények, amelyeknek nincs differenciálhányadosuk." Megjegyezzük még, hogy Weierstrass előtt már Bolzano rájött olyan folytonos függvény létezésére, amely sehol sem differenciálható, de eredményét nem publikálta.

Ismeretes, hogy valamely (a, b) intervallumban definiált folytonos függvények *egyenletesen* konvergens sorozatának határfüggvénye szintén folytonos az (a, b)-ben. Azt is tudjuk, hogy végtelen függvénysorokkal, vagy ami ugyanaz, -sorozatokkal sok olyan új függvényt nyerhetünk, amelyek nem szerepeltek az addig ismert függvények közt (például alkalmas hatványsorokkal eljuthatunk a BESSEL-függvényekhez). De már a Fourier-sorok példái is megmutatták, hogy ha egy végtelen függvénysor (-sorozat) nem egyenletesen konvergál valamely intervallumban, akkor — bár a függvénysor valamennyi tagja folytonos — a sor összege nem szükségképpen folytonos függvény. Felmerült a kérdés, hogy kiindulva valamely (a, b) intervallumban értelmezett *összes* folytonos függvényből, képezve ezekből minden lehetséges, az intervallumban mindenütt konvergens sorozatokat, milyen tulajdonságúak lesznek az így nyert limes-függvények. Az bizonyos, hogy a limes-függvények kö-

zött lesznek maguk a kiindulásul szolgáló folytonos függvények is, mert hiszen az összes lehetséges konvergens függvénysorozat között ott vannak az egyenletesen konvergens sorozatok is. De ezeken kívül biztosan kapunk új, már nem folytonos függvényeket is. Az ilyen limes-képzéssel nyert függvények tulajdonságait a századforduló idején a francia BAIRE vizsgálta rendszeresen. Ezzel elkezdődött mindazoknak a valós függvényeknek rendszerbe foglalása, amelyek egyáltalán elérhetők határérték-képzéssel. Nevezzük *nulladosztályú* függvényeknek az (a, b) intervallumban definiált *összes* folytonos függvényt!

Mindazoknak a függvényeknek a halmazát, amelyek folytonos függvények konvergens sorozatának határfüggvényeként adódnak, nevezzük *első osztályú* függvényeknek! Az előbbiek szerint az első osztályú függvények halmaza magában foglalja a nulladosztályú függvényeket, azaz a folytonos függvényeket is. Ezt a limesképzést folytassuk tovább, de most már az összes első osztályú függvényből képezzünk minden lehető módon konvergens sorozatokat! Az így kapott limes-függvényeket nevezzük *másodosztályú* függvényeknek! Be lehet bizonyítani, hogy ha az első osztályú függvényekből képzett konvergens függvénysorozatok egyenletesen konvergálnak, akkor a limes-függvény is első osztályú. Ezért a másodosztályú függvények halmaza tartalmazza az első osztályú függvényeket is. Azokat az első osztályú függvényeket, amelyek nem folytonosak mindenütt, pontosan első osztályúaknak, azokat pedig, amelyek másodosztályúak, de nem első osztályúak, pontosan másodosztályúaknak nevezzük. Ezt a limes-képzést folytassuk tovább minden határon túl! Így kapjuk az (a, b) intervallumban definiált *Baire-függvényeket*. Baire csupán e függvények halmazának első osztályát vizsgálta meg, a többi függvény lényeges tulajdonságait BOREL és főképp LEBESGUE derítette fel. Lebesgue pl. bebizonyította, hogy bármely n természetes számhoz léteznek pontosan az n-edik Baire-osztályba tartozó függvények. Sőt a második transzfinit rendszámosztály minden α rendszámához is létezik pontosan ebbe a rendszámosztályba tartozó Baire-függvény.

A ponthalmazelmélet és ezen keresztül az absztrakt metrikus terek elméletének kifejlődésével a valós függvény fogalma tovább bővült.

Mint ismeretes, *metrikus tér*nek nevezünk egy ponthalmazt akkor, ha a halmaz bármely két pontja között értelmezve van egy „távolság", azaz a halmaz bármely x és y pontjához tartozik egy $d(x, y)$ nemnegatív valós szám, amelyre fennállnak a következők: $d(x, y)=0$ pontosan akkor, ha $x=y$; $d(x, y)=d(y, x)$; végül három pont: x, y és z esetén igaz a háromszög-egyenlőtlenség:

$$d(x, y)+d(y, z) \geqq d(x, z).$$

Nyilván a valós számegyenes, a komplex számsík, valamint ezeknek bármely részhalmaza metrikus tér a szokásos távolságdefinícióval: ha x és y két ilyen szám, akkor távolságukon a $d(x, y)=|x-y|$ nemnegatív számot értjük. Tetszőleges metrikus téren mármost ugyanúgy értelmezzük a valós függvényt, mint a számegyenes valamely intervallumán: ha M metrikus tér, pontjait latin kisbetűkkel jelöljük, akkor az M-en definiálunk egy $f(x)$ valós függvényt, ha valamilyen utasítás alapján M minden x pontjához egyértelműen hozzárendelünk egy valós számot. Megjegyezzük, hogy ugyanígy definiálunk az M-en egy komplex értékű függvényt is; ekkor M minden x pontjához egy komplex számot rendelünk. A folytonosság értelmezéséhez definiálni kell M pontjainak környezeteit. Ez legegyszerűbben a pontok köré írható úgynevezett gömbökkel történhet. Ha x valamely pontja egy metrikus térnek, akkor az x mint középpont köré írható r sugarú nyílt gömbön mindazoknak a pontoknak a halmazát értjük, amelyek távolsága x-től kisebb, mint r. Valamely $f(x)$

függvény x-ben folytonos, ha bármely $\varepsilon>0$-hoz létezik x mint középpont körül olyan $\delta>0$ sugarú gömb, amelyen belül az f függvény ingadozása kisebb ε-nál. Még általánosabb a folytonosság értelmezése, ha nyílt halmazokkal dolgozunk. Ekkor ugyanis a folytonosság tetszőleges topologikus terekben definiált valós függvények esetében is értelmezhető. Topologikus terekben hasonlóan értelmezzük a valós függvény fogalmát, mint egy (a, b) számintervallumon: a tér minden pontjához hozzárendelünk egy valós (esetleg komplex) számot (a komplex esetben persze komplex értékű függvényt kapunk). Topologikus térben definiált $f(x)$ függvény folytonos a tér valamely x pontjában, ha bármely $\varepsilon>0$ számhoz létezik a térnek olyan, x-et tartalmazó nyílt halmaza (azaz x-nek olyan nyílt környezete), amelyben az f függvény ingadozása kisebb ε-nál. A folytonosság alapján konvergens függvénysorozatok limes-függvényei segítségével értelmezhetők topologikus terekben is a Baire-függvények.

Valamely metrikus vagy topologikus térben értelmezett valós $f(x)$ függvény a térben folytonos, ha a tér minden x pontjában folytonos. Könnyen meg lehet mutatni, hogy ez pontosan akkor igaz, ha a függvény értékkészletének, tehát a valós számegyenes bármely nyílt intervallumának *ősképe* nyílt halmaz. Mit értünk az $f(x)$ függvény értékkészlete valamely H részhalmazának ősképén? Ez az őskép az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának, tehát az alapul vett metrikus vagy topologikus térnek mindazon x pontjaiból álló halmaz, amely x pontoknak $f(x)$ képe a H halmazba esik.

A folytonos valós függvénynek ez az értelmezése lehetővé teszi, hogy tetszőleges metrikus vagy topologikus térben is értelmezzük a Baire-függvényeket. Ez ugyanúgy történik, mint egy (a, b) valós számintervallumon definiált valós függvények esetében.

A valós függvény értelmezési tartományának ilyen kibővítésével (számintervallum helyett tetszőleges metrikus, illetve topologikus tér) eljutunk a függvény legáltalánosabb fogalmához, amennyiben megtartjuk a Dirichlet-féle definíció lényegét, ti. *a hozzárendelést,* de értelmezési tartománynak is és értékkészletnek is *tetszőleges halmazokat* veszünk, amelyekről még csak azt sem tesszük fel, hogy metrikus vagy topologikus terek. E szerint függvényen egyszerűen *hozzárendelést* vagy más szóval *leképezést* értünk: legyen A tetszőleges elemeknek (amelyeket „pontoknak" nevezünk) halmaza, legyen B egy másik ilyen halmaz! Jelöljük az A halmaz elemeit latin kisbetűkkel! Jelöljön f valamilyen hozzárendelési (leképezési) utasítást, amely A minden $x\in A$ eleméhez egyértelműen hozzárendeli a B halmaz egyetlen, $f(x)$-szel jelzett elemét! Azt mondjuk, hogy az A halmazon értelmeztünk egy egyértelmű $f(x)$ függvényt, amely A-t leképezi a B halmazba. $f(x)$-et az x pont (elem) *képpontjának* nevezzük. Az A halmaz *az f függvény értelmezési tartománya,* a B-hez tartozó valamennyi $f(x)$ képpont halmaza (ez általában B-nek egy részhalmaza) pedig *az f értékkészlete.* Ha f értékkészlete megegyezik a teljes B halmazzal, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az A halmazt leképezi B-re. Jelöljük a B halmaz elemeit vesszős latin kisbetűkkel: $x', y', z', \ldots$! $f^{-1}(x')$ jelenti mindazoknak a pontoknak halmazát A-ban, amelyeknek f-képe az $x'\in B$ pont. $f^{-1}(x')$ neve: az x' pont ősképe.

Ha $B_1\subset B$ (B_1 részhalmaza a B-nek), $f^{-1}(B_1)$ a B_1 halmaz ősképe; ez az A halmaz mindazon x pontjainak a halmaza, amelyekre $f(x)\in B_1$. Ha B *minden* x' pontja csak *egyetlen* $x\in A$ pontnak a képe ($x'=f(x)$), akkor f az A halmazt kölcsönösen egyértelműen képezi le B-re.

A folytonos függvény definíciójához szükséges, hogy mind az A, mind a B halmaz topologikus tér legyen. Ez esetben az A-n definiált $f(x)$ függvény folytonos az A térben, ha a B tér minden $0'\subset B$ nyílt halmazának $f^{-1}(0')$ ősképe az A-ban nyílt halmaz. f az $x_0\in A$ pont-

ban folytonos, ha az $x_0'=f(x_0)$ képpont *minden* $U'(x_0' \in U')$ nyílt környezetének $f^{-1}(U')$ ősképe az x_0-nak nyílt környezete. Ha f az A-t kölcsönösen egyértelműen képezi le B-re, és emellett f és az inverz f^{-1} függvény is folytonos, akkor B az A-nak topologikus képe és viszont, ekkor f az A-t topologikusan képezi le B-re. A mondottak értelmében ekkor (és csak ekkor) az A és a B nyílt halmazai egymásnak kölcsönösen egyértelműen felelnek meg, ahogyan mondani szokás, A és B egymással topológiailag ekvivalensek.

Látható az elmondottakból, hogy valamely függvény szerkezeti tulajdonságai (tehát a folytonosság, valamely Baire-osztályba tartozás, mérhetőség stb.) lényegesen az alapul vett A értelmezési tartomány, valamint a B értékkészlet ponthalmazelméleti sajátságain múlnak. Egyébként a leképezés vagy hozzárendelés a függvénynek olyan általános fogalma, hogy érdekesebb eredményekhez csak úgy jutunk, ha az alapul vett A értelmezési tartományra és a B értékkészletre speciális szerkezeti feltevéseket teszünk. Ilyen feltevés például, hogy az A-t *lineáris és normált térnek* tekintjük. Ez esetben A *kommutatív csoport,* a csoportműveletet összeadásnak szoktuk nevezni. Ezenkívül értelmezzük A elemeinek (amelyeket „vektorok"-nak is hívunk) valós vagy komplex számokkal történő szorzását is. Az A minden x eleméhez tartozik egy $\|x\|$-szel jelölt nemnegatív valós szám, az x elem „normája". $\|x\|=0$ pontosan akkor, ha x az A *null-eleme,* más szóval a csoport neutrális eleme. A norma olyan szerepet játszik, mint a közönséges tér vektorainál a hosszúság, vagy a valós számoknál az abszolút érték, mert a normának is megvan a háromszög-tulajdonsága: ha $x \in A$ és $y \in A$, akkor $\|x+y\| \leqq \|x\|+\|y\|$.

Ha pedig λ valós vagy komplex szám, akkor $(x \in A)$ $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

Az ilyen lineáris, normált terek metrikus terek, amelyekben két, x és y elem távolságát az $\|x-y\|$ szám értelmezi. Könnyen belátható, hogy ez a távolságdefiníció rendelkezik a távolság szokásos tulajdonságaival.

Különösen érdekes az az eset, amikor az A lineáris, normált tér az előbbi metrikában még *teljes* is. Ez utóbbi tulajdonság azt jelenti, hogy az A elemeinek (vektorainak) minden $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ún. Cauchy-sorozata konvergens; vagyis a sorozat $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|x_n-x_m\|=0$ tulajdonságából következik olyan $x \in A$ elem létezése, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n-x\|=0$, amit így is jelölünk: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$. A lineáris, normált és teljes tereket BANACH-*tereknek* nevezzük. Ilyen Banach-tér a közönséges számegyenes, a sík, a közönséges tér, de számtalan sok más halmaz is Banach-tér. Így például egy $[a, b]$ intervallumban definiált összes valós, folytonos függvény halmaza a $\|f\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ normával, az $[a, b]$ intervallumban értelmezett összes Lebesgue-integrálható valós függvény halmaza a

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

normával, az $[a, b]$-ben négyzetesen integrálható függvények halmaza a

$$\|f\| = +\sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx}$$

normával stb.

Ez utóbbi Banach-tér különösen érdekes, mert egyik konkrét ábrázolása, realizációja a Banach-terek egy nagyon fontos alosztályának, a HILBERT-*tereknek*. Valamely Banach-teret akkor mondunk Hilbert-térnek, ha értelmeztük két vektor skaláris szorzatát. Ez az értelmezés lehet nagyon általános és elvont, de rendelkeznie kell a közönséges térbeli vektorok skaláris szorzásának lényeges tulajdonságaival. A skaláris szorzás értelmezésével a Hilbert-terekben bevezethetünk egy geometriát: a közönséges EUKLEIDÉSZ-*féle*

terek igen sok tulajdonsága átvihető a Hilbert-terekbe. Igen gazdag, sokrétű függvényvizsgálatra van lehetőség, ha a függvény A értelmezési tartománya és B értékkészlete egy Banach-, illetve Hilbert-tér. A szóba kerülő függvények ebben az esetben egy Banach-tér (Hilbert-tér) vektorainak egy másik Banach-tér (Hilbert-tér) vektorait feleltetik meg. Az ilyen függvényeket *operátoroknak* nevezzük, vizsgálatukkal egy ma már igen terjedelmes tudományág, a *funkcionálanalízis* foglalkozik. Különös részletességgel kutatták ki az ún. *lineáris operátorok* tulajdonságait. Valamely f operátor lineáris, ha az A értelmezési tartomány lineáris kifejezéséhez a B értékkészlet megfelelő lineáris kifejezését rendeli. Konkréten: legyen x és y az A Banach-(Hilbert-)tér két tetszőleges vektora, legyenek α és β tetszőleges valós vagy komplex számok! Az f operátor lineáris, ha

$$f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x)+\beta f(y).$$

Megkövetelik még ezenkívül az f operátor folytonosságát is, tehát ha $x_n \to x$, akkor $f(x_n) \to f(x)$.

Abban a speciális esetben, amikor a B értékkészlet a valós vagy a komplex számok halmaza, az f lineáris operátort lineáris *funkcionálnak* nevezzük. A funkcionálanalízis megalapítói és legnagyobb művelői a magyar RIESZ Frigyes, a francia M. FRECHET és az ugyancsak magyar NEUMANN János voltak. Utóbbinak köszönhető az absztrakt Hilbert-tér elméletének kidolgozása, amelyre Neumannt főképp a kvantummechanika egzakt matematikai megalapozása serkentette. Itt újból láthatjuk a matematikának és a fizikának egymásrautaltságát és egymásra gyakorolt termékenyítő hatását. Meg kell még említeni, hogy a Hilbert-terek elméletének vizsgálata ma is folyik, és ebben a kutatómunkában a világon élen jár a szegedi matematikai iskola vezetője, SZŐKEFALVI-NAGY Béla akadémikus. Híres könyvét kiadták francia, angol, német, orosz és kínai nyelven, és ez a könyv tankönyvül szolgál több nagy amerikai egyetemen.

Utolsónak néhány szót a legújabb függvényfogalomról, a *disztribúciókról*. Habár itt lényegében nincs szó ténylegesen új függvényfogalomról, mert az általános leképezés (hozzárendelés) fogalmába ez az új alkotás is beleillik. A kvantummechanikában DIRAC használt egy *deltának* nevezett és a görög delta betűvel jelölt „függvény"-t, amely azonban egyáltalán nem illett bele a valós függvény addigi fogalmába. Neumann János elkerülte ezt a fogalmat, de a matematikusok szerették volna felderíteni, hogy mi rejtőzik a Dirac-delta mögött. Kiderült, hogy ez a fogalom is szabatossá tehető, mégpedig lényegében a funkcionálanalízis elvei alapján. *Alaptartománynak*, vagyis *értelmezési tartománynak* felvették a valós számegyenesen értelmezhető összes olyan *valós értékű függvény halmazát*, amely függvények mindegyike a számegyenesnek egy véges intervallumán kívül azonosan zérus, és a teljes számegyenesen akárhányszor differenciálható. Lényeges, hogy az a véges intervallum, amelyen a szóban forgó függvények nem azonosan zérusok, függvényről függvényre általában változik, tehát mindegyik ilyen függvénynek más és más ez az intervalluma. Az ilyen függvényeket *finit* függvényeknek nevezzük. Tehát a finit függvények az egész számegyenesen definiált olyan valós értékű függvények, amelyek egy (függvényről függvényre változó) véges hosszúságú intervallumon kívül azonosan zérusok és akárhányszor differenciálhatók. Az új függvényfogalom értelmezési tartománya, amelyet az előzőkben az A betűvel jelöltünk, a valós számegyenesen értelmezett összes finit függvény halmaza. Mindegyik ilyen finit függvényhez rendeljünk hozzá lineáris módon egy valós számot! A finit függvények halmazán mint értelmezési tartományon így definiált valós függvény a disztribúció. Kiderült, hogy vannak közöttük olyan disztribúciók, amelyeket

elő lehet állítani egy megfelelő „generáló" függvénynek és az alapul vett finit függvénynek segítségével mint e két függvény szorzatának az egész számegyenesen vett határozott integrálját. Ezeket a disztribúciókat reguláris disztribúcióknak nevezzük. Vannak viszont olyanok, amelyek nem állíthatók elő így, ezek a szinguláris disztribúciók. Az is kiderült, hogy a Dirac-delta szinguláris disztribúció. A disztribúciók elmélete máris sok alkalmazási területre talált nemcsak a kvantumfizikában, de a fizika több más ágában is, sőt a technika egyes kérdéseiben is sikerrel alkalmazták. Ebből is látszik, hogy a fizika állandóan kifejti termékenyítő, új és új matematikai területek meghódítására serkentő hatását, a matematika fejlődése viszont igen hasznos a kutató fizikus számára, aki új gondolatait, elméleteit nem tudná egzakt alakban és világosan kifejezni a matematika hatalmas apparátusa nélkül. Ez az értékes kölcsönhatás jelenti mindkét tudománynak az életet, ez sikereik biztosítéka.

Közlemény a matematikai jelölésekre vonatkozó hatályos országos szabványokról

A Magyar Szabványügyi Hivatalból kapott tájékoztatás alapján közöljük lapunk olvasóival az alábbiakat. Tesszük ezt abban a reményben, hogy ezzel is hozzájárulunk azoknak a meglehetősen éles formában felvetődött kérdéseknek tisztázásához, amelyek erre a területre vonatkoznak, és a középiskolai új matematika-tantervek, valamint a hozzájuk csatlakozó új dokumentumok bevezetése kapcsán különös hangsúlyt nyertek.

1. A matematikai jelölésekkel foglalkozó, jelenleg hatályos országos szabványok a következők:

MSZ 2379—72 : Halmazelméleti és matematikai logikai jelölések
MSZ 2380—72 : Algebrai jelölések
MSZ 3969—72 : Valószínűségszámítási és matematikai statisztikai jelölések
MSZ 4899—71 : Általános matematikai jelölések
MSZ 23 901—73: Vektor-, tenzor- és differenciálgeometriai jelölések
MSZ 23 902—73: A matematikai analízis jelölései

2. Ezeket a szabványokat a Magyar Szabványügyi Hivatal Szabványboltjában (Budapest, Üllői út 24., 1085) lehet beszerezni.

3. A szabványok módosítását, illetőleg új szabványok bevezetését bármely szerv kezdeményezheti.

4. Az 1. pontban felsorolt szabványok az RSZ 2625—70: Általános matematikai jelölések elnevezésű KGST-szabványajánlás honosítását képezik. A közeljövőben egységes KGST-szabvány (SZT) kidolgozása várható az RSZ 2625—70 helyett. A Magyar Szabványügyi Hivatal az SZT kimunkálása után szándékozik átdolgozni az idevágó hazai előírásokat.

A szerkesztőség

DR. BOGNÁR JÁNOSNÉ—DR. NEMETZ TIBOR
egyetemi adjunktus — tudományos főmunkatárs
ELTE TTK — MTA Matematikai Kutató Intézete

Játék és valószínűség

Az általános iskolai matematika-tanterv után a fakultatív gimnáziumi tantervben is végre helyet kapott a valószínűségszámítás. E témakör tanításához nélkülözhetetlen a véletlen jelenségekre vonatkozó tapasztalati háttér biztosítása. Az adatgyűjtés unalmas és fáradságos munkáját a véletlennel kapcsolatos játékok segítségével rendkívül élvezetessé lehet tenni. Jelen ismertetésben három olyan játéktípust mutatunk be, amelyek bármely szinten játszhatók, természetesen különböző mélységű elemzéssel. Ezek a játékok persze nemcsak azért hasznosak, mert általuk gyorsan és szórakoztatóan gyűjthetünk adatokat, hanem főképpen azért, mert elemzésük során fejleszthető a modellalkotási készség, s a véletlennel kapcsolatos problémák megoldásának sok módszere ismerhető meg rajtuk keresztül. A játékok egy részének elemzését majd az olvasóra bízzuk.

Az első típus a szokásos és legősibb szerencsejátékok körébe tartozik. Ezek során egy (vagy több) véletlen eseményt figyelnek meg a játékosok, és azok bekövetkezésétől függően, valamilyen szabály szerint nyernek vagy vesztenek valamennyit. Az ilyen játékok elemzése során elegendő bizonyos *események valószínűségét* vagy *valószínűségi változók várható értékét* meghatározni.*

A második típusnál a játékosok már kevésbé vannak a véletlen kénye-kedvének kiszolgáltatva. Módjukban áll ugyanis különböző lehetőségek között válogatni, különböző stratégiákat követni, és ezáltal várható nyereményüket maximalizálni. Az ilyen típusú játékok elemzése során a stratégiák függvényében az átlagos nyeremény szélsőértékét (maximumát) is meg kell határozni.

A véletlenhez fűződő játékaink harmadik csoportját az jellemzi, hogy kimenetelük nem a véletlentől függ, pusztán a játékosok választásaitól. A játékosok azonban csak úgy tudnak „jó" stratégiát követni, választásaikat csak úgy sikerül az ellenfél számára kiismerhetetlenné tenni, ha segítségül hívják a véletlent.

Szokásos kérdés, hogy mikor *igazságos*, mikor *méltányos* egy *játék*. Ha két játékos egymás ellen játszik, játékukat igazságosnak lehet vélni, ha mindegyikük ugyanakkora valószínűséggel nyerhet. A legegyszerűbb játékok esetén ez a kritérium elfogadható. Ez a helyzet például a fej-írás játék esetén. Ha azonban a játékban szerepet játszó véletlen kísérlet kimeneteleitől függően a játékosok különböző összegeket nyerhetnek, ez a kritérium már elfogadhatatlan lehet. Példa erre a következő. Két játékos, X és Y egy szabályos kockával dob. Ha az eredmény nem 6-os, X nyer Y-tól 1 Ft-ot, különben Y nyer X-től c Ft-ot. Itt X nyilván nagyobb valószínűséggel nyer. Ennek ellenére, pl. $c=100$ esetén mindenki Y szeretne lenni. Ezért az ilyen kétszemélyes játékot akkor célszerű *méltányosnak* nevezni, ha a *nyeremény várható értéke* 0. Tehát az előbbi példában $c=5$.

---

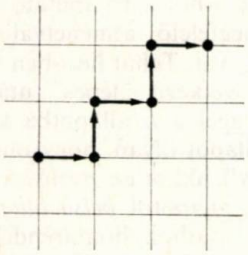
* Ha a véletlen jelenség kimenetelei az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valós számok és ezek valószínűségei rendre $p_1, p_2, \ldots, p_n$, $(p_i \geqq 0, i=1, 2, \ldots, n; \sum_{i=1}^{n} p_i = 1)$, akkor azt mondjuk, hogy a véletlen jelenséget a $\xi = \begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ p_1, p_2, \ldots, p_n \end{pmatrix}$ valószínűségi változóval írtuk le. A ξ várható értékét (átlagát), melyet $M(\xi)$-vel jelölünk, az

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

képlet adja.

I.

1. játék. *Véletlen amőba.* Az általános iskolai 1. osztályos új feladatlapok egyikén a következő játék szerepel. Egy 10×10-es négyzetrács hálózaton egy korongot mozgat a játékos, mégpedig 1 egységgel jobbra lép a korong, ha egy feldobott érmén fej van felül, különben felfelé mozog 1-et. A korong induláskor a bal alsó sarokban van. A játékosnak azt kell előre megtippelnie, hogy a 10-edik dobás után hova kerül a korong. Ezt a játékot könnyen amőbatípusú játékká változtathatjuk. A 10×10-



es négyzetrács helyett tekintsünk egy végtelen nagy négyzetrácsot, amelynek egyik rácspontjából indulunk el, és a meglátogatott helyeket sorban megjelöljük egy karikával. Az eredeti amőbához hasonlóan most is addig tart a játék, amíg adott számú, mondjuk n(n legalább 3) szomszédos karika kerül egy vonalba. Ez előfordulhat vízszintes, illetve függőleges irányban, nevezzük ezeket „egyenes" szakasznak. Az eredeti amőbajáték ferde vonalának most egy „lépcsőzet" felel meg (tehát alternáló fej-írás sorozat). $n=6$-ra a két lehetséges lépcsőtípust az ábra mutatja.

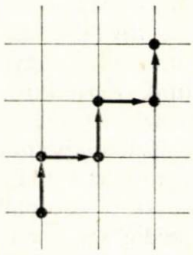
Véletlen amőbánkat két játékos játszhatja, legyenek ők Egyenes és Lépcső. Ha az adott hosszúságú egyenes előbb fordult elő, mint ugyanolyan hosszúságú lépcső, akkor Egyenes nyer, különben Lépcső. Igazságos-e ez a játék?

A véletlen amőba következő változata A. Engeltől származik (l. *A. Engel:* Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, 1—2. Ernst Klett, Stuttgart, 1976).

2. játék. *Káin és Ábel fej-írást játszik.* Káin is, Ábel is választott magának egy 4 hosszúságú fej-írás sorozatot: Káiné az FFII sorozat, Ábelé az FIFI sorozat (ahol F fejet, I írást jelent). Egy szabályos érmét addig dobnak fel ismételten, amíg négy egymás utáni dobás valamelyikük sorozatával egyező lesz. Ekkor vége a játéknak és az nyer egységnyi összeget a másiktól, akinek a sorozata megjelent.

Kérdés: Igazságos-e a játék?

Az igazságosság kritériumának most az tekinthető, hogy a nyerés valószínűsége egyenlő-e. Bizonyára sokak számára igaz-

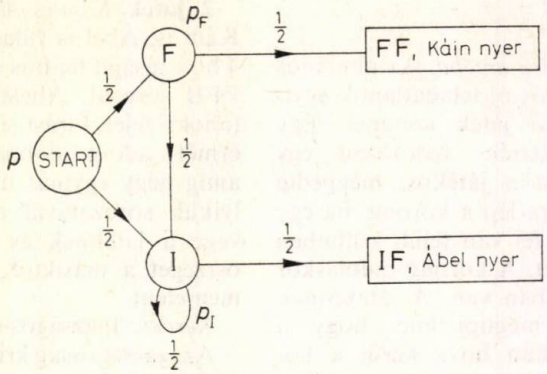


ságosnak tűnik ez a játék, mondván, hogy bármely rögzített 4 hosszúságú fej-írás sorozat $\frac{1}{16}$ valószínűséggel jöhet ki. Ez azonban csak akkor lenne igaz, ha a játék csak 4 dobásból állna. (Ebben az esetben természetesen döntetlen is lehetne.)

A szóban forgó valószínűségek kiszámítására egy általános módszer használható. Az egyszerűség kedvéért ezt a módszert először a fenti játéknak egy triviális változatában mutatjuk be.

2′. játék. Módosított játékunkban Káin és Ábel kettő hosszúságú sorozatot választanak maguknak, Káin FF-et, Ábel IF-et. A játék lefolyását egy folyamatábra (vagy gráf) segítségével írhatjuk le.

Folyamatábránknak öt *állapota* van. Ezek közül az egyik a kezdőállapot, ahonnan a játék elején kiindulunk, s többet ide nem is térünk vissza. Két másik állapot sem igényel sok magya-



rázatot: ezek a „végállomások", ide érve a játék véget ér. Amíg ide elérünk, addig azonban a további két állapot között bolyongunk. Ezek egyike az I állapot. Ide jutunk bármikor, amikor írást dobunk. Ennek megfelelően vezet ide 3 nyíl: a kezdőállapotból, az F állapotból és magából az I állapotból is. Az F állapotba csak a kezdőállapotból lehet jutni, mégpedig fej dobás esetén. Ha az F állapotban fejet dobunk, az FF végállomásra érünk, míg írás dobása esetén átkerülünk az I állapotba, s itt maradunk az első fej dobásig. Ahogy az a folyamatábráról is leolvasható, Káin akkor és csak akkor nyer, ha az első két dobás mindegyike fej, tehát nyerésének valószínűsége 1/4. (Belátható, hogy a játék 1 valószínűséggel befejeződik, ezért Ábel nyerési valószínűsége 3/4.) Mint említettük, ennek a játéknak az elemzése triviális. Mi pusztán arra használtuk, hogy egy általános módszert szemléltessünk.

Általában egy véletlen folyamatot egy *irányított gráfon* való bolyongással (egymás utáni lépésekkel) szemléltethetünk: a *gráf szögpontjai* a folyamat lehetséges *állapotai,* az állapotok közül egyesek irányított éllel vannak összekötve. Az élekre ráírjuk azt a valószínűséget, amivel a (nyíl irányába haladva) következő (szomszédos) állapotba el lehet jutni (átmenetvalószínűség). Az állapotokat megszámozhatjuk az 1, 2, ..., n számokkal. Ha az i állapotból egy lépésben eljuthatunk a k állapotba, akkor ezt i-ből k-ba mutató nyíllal jelöljük, a megfelelő átmenetvalószínűséget pedig p_{ik}-val. Tehát ha i-ben vagyunk, akkor a következő „lépés" után p_{ik} valószínűséggel a k állapotba kerülünk. Ha egy állapot olyan, hogy onnan nem indul *ki* nyíl, akkor ezt *nyelőnek* nevezzük. A többi állapotot *belső állapotnak*. Minden i állapothoz hozzárendelhetjük azt a p_i (feltételes) valószínűséget, amivel egy adott nyelőbe (nyelőkbe) ezen állapotból kiindulva eljuthatunk egymáshoz kapcsolódó nyilak mentén *(úton)*. Nyilvánvaló, hogy egy i állapotból kiinduló nyilakra (ágakra) írt valószínűségek összege 1 kell, hogy legyen (hiszen valahová biztos eljutunk): $p_{i1}+p_{i2}+\ldots+p_{in}=1$; nyelő állapotra $p_{ii}=1$. A folyamat leírásához általában meg kell még adnunk, hogy kezdetben milyen valószínűséggel vagyunk az egyes állapotokban (kezdeti eloszlás). A most leírt folyamatot elnyelő Markov-láncnak nevezik. Az ilyen folyamatokkal kapcsolatos kérdések egy része a következő tételek segítségével válaszolható meg.

1. tétel. Ha p_i jelöli annak a feltételes valószínűségét, hogy egy belső i állapotból indulva eljutunk egy adott nyelő állatpotba, akkor

$$p_i = p_{i1}p_1+p_{i2}p_2+\ldots+p_{in}p_n,$$

azaz az i állapotból kiindulva egy adott nyelőben való elnyelődés valószínűsége egyenlő a szomszédos állapotokból való

elnyelődés valószínűségeinek súlyozott közepével (az átmenetvalószínűségekkel súlyozva).

Ez a teljes valószínűség tételének átfogalmazása.*

E tétel alkalmazásával Ábel nyerési valószínűségét ($P_{\text{Ábel}} \equiv P$) a **2'.** játékban így kapjuk: Legyen p_F, illetve p_I annak a (feltételes) valószínűsége, hogy az F, illetve az I állapotból indulva Ábel nyer. Ekkor

$$p_I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} p_I, \quad \text{vagyis} \quad p_I = 1;$$

$$p_F = \frac{1}{2} p_I = \frac{1}{2},$$

így

$$P = \frac{1}{2} p_F + \frac{1}{2} p_I = \frac{3}{4},$$

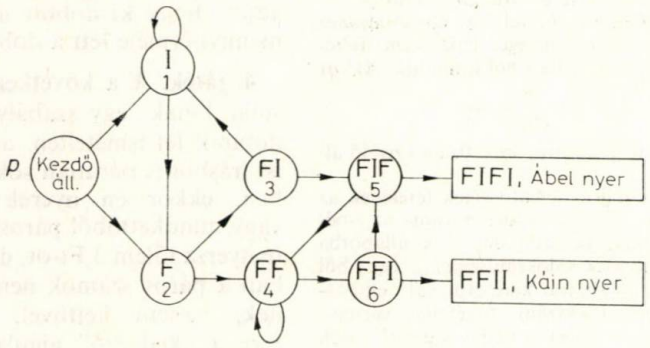
tehát a játék nem igazságos.

Ezek után határozzuk meg a **2.** játékban Ábel nyerési valószínűségét (P). Megadjuk a játék menetét leíró gráfot. Mivel minden nyílra 1/2 valószínűség kerülne, ezt rá sem írtuk. A jelölések egyszerűsítése végett a belső állapotokat az I, F betűkből álló címkéken kívül számmal is megjelöltük.

Ha tehát p_i-vel jelöljük annak a (feltételes) valószínűségét, hogy az i állapotból indulva Ábel nyer, akkor az **1.** tétel alapján a következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$p_6 = \frac{1}{2} p_5,$$

$$p_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} p_4,$$



$$p_4 = \frac{1}{2} p_6 + \frac{1}{2} p_4,$$

$$p_3 = \frac{1}{2} p_5 + \frac{1}{2} p_1,$$

$$p_2 = \frac{1}{2} p_3 + \frac{1}{2} p_4,$$

$$p_1 = \frac{1}{2} p_1 + \frac{1}{2} p_2.$$

---

* Emlékeztetünk a teljes valószínűség tételére: Ha $B_1, B_2, \ldots, B_n$ egy teljes eseményrendszer, azaz egymást páronként kizáró, pozitív valószínűségű események összessége és valószínűségeik összege 1, akkor egy tetszőleges A esemény valószínűsége egyenlő az A esemény B_k-ra vonatkozó feltételes valószínűségeinek a B_k események valószínűségeivel súlyozott közepével. (Lásd *Rényi Alfréd:* Valószínűségszámítás, Tankönyvkiadó, 1968 vagy *Prékopa András:* Valószínűségelmélet, Műszaki Kiadó, 1971.) A mi esetünkben, az i állapotból kiindulva az első lépésünket valamelyik szomszédos k állapotba tesszük meg (B_k esemény), éppen p_{ik} valószínűséggel, s ha k-ba léptünk, onnan kell elnyelődni, aminek p_k a valószínűsége. Az *1. tétel* egyébként közvetlenül adódik a következő (különben nyilvánvaló) feltevésekből:

a) egy út valószínűsége egyenlő az ágak (nyilak menti) valószínűségeinek szorzatával;

b) az i állapotból egy adott nyelőbe jutás valószínűsége egyenlő az i-ből induló és a nyelőbe vezető utak valószínűségeinek összegével.

Végül a keresett valószínűség:

$$P = \frac{1}{2} p_1 + \frac{1}{2} p_2 .$$

Az egyenletrendszert megoldva, Ábel nyerésének valószínűségére $P = \frac{4}{9}$ adódik.

Megjegyzés. Ha kiszámítjuk mind Ábel, mind Káin nyerési valószínűségét (az elnyelődések valószínűségeit) és ezek összege 1, ez egyben annak is bizonyítéka, hogy a játék 1 valószínűséggel befejeződik véges sok lépés (dobás) után. Nem mindegy azonban, hogy ez átlagosan meddig tart. A játék befejeződéséig (elnyelődésig) szükséges dobások számának várható értékét szeretnénk meghatározni. Ennek kiszámításához a következő tétel szolgáltat módszert:

2. tétel. Jelöljük m_i-vel az elnyelődéshez (bármely nyelőben) szükséges lépésszám (feltételes) várható értékét, ha i-ből indulunk. Akkor

$$m_i = 1 + \sum_{k=1}^{n} p_{ik} m_k$$

minden i belső állapotra, $m_i = 0$, ha i nyelő állapot.

Ez a tétel a teljes várható érték tételének az átfogalmazása. Az első lépést ugyanis az i-ből kiindulva valamelyik szomszédos k állapotba tesszük meg, aminek valószínűsége p_{ik}. Így i-ből a nyelőbe a k állapoton keresztül való eljutáshoz szükséges lépésszám feltételes várható értéke $(1 + m_k)$, s ezért a teljes várható érték tétele alapján m_i éppen ezek súlyozott közepe, azaz:

$$m_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(1 + m_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} p_{ik} + \sum_{k=1}^{n} p_{ik} m_k = 1 + \sum_{k=1}^{n} p_{ik} m_k .$$

Ennek alapján könnyen beláthatjuk, hogy a **2.** játék átlagosan $8,\dot{8}$ dobásból áll. Legyen ugyanis M a szükséges dobások várható értéke. A bevezetett jelöléseket használva, a játék gráfja alapján a következő egyenletrendszer adódik:

$$m_6 = 1 + \frac{1}{2} m_5 ; \qquad m_5 = 1 + \frac{1}{2} m_4 ;$$

$$m_4 = 1 + \frac{1}{2} m_4 + \frac{1}{2} m_6 ; \quad m_3 = 1 + \frac{1}{2} m_5 + \frac{1}{2} m_1 ;$$

$$m_2 = 1 + \frac{1}{2} m_3 + \frac{1}{2} m_4 ; \quad m_1 = 1 + \frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{2} m_2 .$$

Végül az elnyelődéshez szükséges összes dobás várható értéke:

$$M = 1 + \frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{2} m_2 .$$

Megoldás után kapjuk: $M = \frac{80}{9} = 8,\dot{8}$.

3. játék. X és Y 3 érmével játszik. A játék során felváltva dobják fel a birtokukban levő összes érmét, s a fejre esett érméket átadják társuknak. A játék addig tart, míg valamelyik dobás után az összes érme egyik játékoshoz kerül. Kezdetben X-nél van mind a 3 érme, s ő dob először.

Kérdés: Mekkora valószínűséggel nyer X? Átlagosan hány dobásból áll egy játék?

Útmutatás: Készítsük el a játék gráfját, melynek szögpontjai (állapotai) megadják, hogy ki dobott utoljára, s kinek mennyi érméje lett a dobás után.

4. játék. X a következő játékot javasolja Y-nak: egy szabályos érmét addig dobunk fel ismételten, amíg vagy fejből is, írásból is páratlan sok van a sorozatban, ekkor én nyerek tőled 1 Ft-ot, vagy mindkettőből páros sok van, ekkor te nyersz tőlem 3 Ft-ot, de ebben a játékban a páros számok nem 0-val kezdődnek, hanem kettővel. Y gyanakszik erre a „kedvező" ajánlatra, és mielőtt belemenne a játékba, X a következő javaslatot teszi. Van egy olyan szimmetrikus kockám, amelynek egy lapjára fejet írtam, 5 lapjára írást. Akarod, hogy inkább ezzel játsszuk az előbb mondott fej-írás játékot?
Ekkor 3 helyett 5 Ft-ot is adok, amikor te nyersz.

Kérdés: Mit tegyen Y? Az érmével vagy a kockával való dobás esetén jár jobban?

Milyen összegek esetén lenne igazságos a játék az érme, illetve kocka esetén?

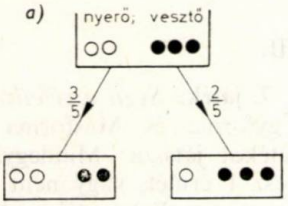
II.

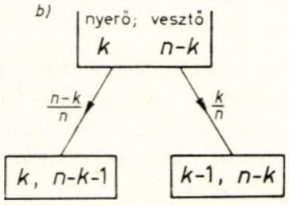
A játékok második csoportjában is függ a játékos nyeresége a véletlentől, a játékos azonban már aktív résztvevője a játéknak; taktikázásával ő maga is befolyásolhatja nyereményének nagyságát.

Példaként egy olyan játékot vizsgálunk meg, melyben egy játékos egy bank ellen egy veszteségesnek tűnő játékot játszik.

5. játék. *A Monte-Belló-i urna.* Egy urnában 2 nyerő és 3 vesztő golyó van, amelyek közül visszatevés nélkül lehet húzni. Ha vesztő golyót húznak, a játékos 50 pontot fizet a banknak, nyerő golyó húzása esetén viszont ő kap a banktól 50 pontot. A játékos bármelyik húzás előtt abbahagyhatja a játékot.

Kérdés: Sok játék esetén nyerhet-e a játékos. Célszerű-e egyáltalán játszani ezt a játékot?





Ebben a játékban nyilván nem a nyerés valószínűsége játssza a döntő szerepet. Azt kell megvizsgálni, hogy mennyi a játékos nyereményének várható értéke, ha a legjobb stratégiával játszik. Nyilván van olyan stratégia, amely mellett nyereményének várható értéke 0, nevezetesen, ha már az első húzás előtt abbahagyja a játékot, azaz el sem kezd játszani. Tud-e ennél jobbat tenni? Mire számíthat, ha az első húzást kéri?

Az *a)* ábrából kiolvashatjuk, hogy ekkor 3/5 valószínűséggel 50-et veszít, viszont számíthat még bizonyos nyereségre, amit az új állapotból kiindulva elérhet. Hasonlóan, 2/5 valószínűséggel nyer 50-et, és annyi további nyereményre számíthat, amit az ennek megfelelő új állapotból elérhet. Ha az így kialakuló várható értéke pozitív, akkor érdemes ezt a húzást kérnie. Ezzel az egy urnás feladatot visszavezettük két másik, az előzőhöz hasonló feladatra, ahol mindkét új feladatban a golyók száma 1-gyel kisebb az eredetinél. Ezt a gondolatmenetet tetszőleges urnaösszetétel esetén megismételhetjük (*b)* ábra). Tegyük fel, hogy az urnában eredetileg k nyerő és $n-k$ vesztő golyó van, és a játék szabályai változatlanok. Jelöljük $E(k, n)$-nel a játékos nyereményének várható értékét az elképzelhető legjobb stratégia mellett. Az előbbiek megismétlésével számítsuk ki, mekkora nyereményre tehet szert a játékos, ha kéri az első húzást! Ez a szám

$$\frac{n-k}{n}(-50+E(k, n-1))+$$

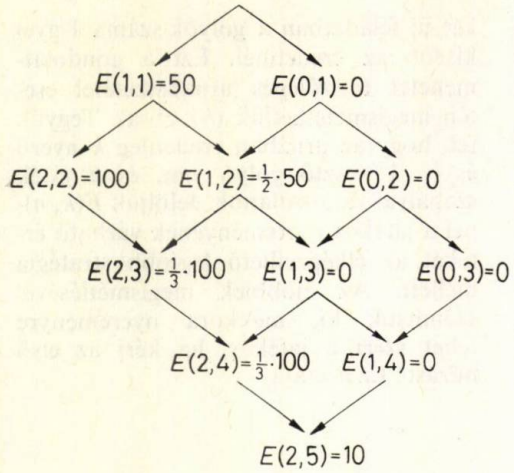
$$+\frac{k}{n}(50+E(k-1, n-1)).$$

Játékosunk nyilván akkor játszik jól, ha csak akkor kéri ezt a húzást, ha ez a várható érték pozitív. Így az optimális stratégia mellett nyereményének várható értékére a következő rekurzió adódik:

$$E(k, n)=\max\left(0, \left\{\frac{2k-n}{n}50+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{n-k}{n}E(k, n-1)+\frac{k}{n}E(k-1, n-1)\right\}\right).$$

Nyilvánvaló, hogy $E(k, k)=k\cdot 50$, hiszen ekkor csak nyerő golyók vannak, valamint $E(0, n)=0$, ekkor ugyanis csak vesztő golyók vannak. Az $n=1$ esetből kiindulva, rekurziónk segítségével tetszőleges urnaösszetételre meghatározhatjuk $E(k, n)$-et, amit a következő ábrával szemléltetünk:



Tehát ez a veszteségesnek tűnő játék kifejezetten előnyös játékosunk számára. Sőt, ha a játék jogáért fizetni kell legfeljebb 10 pontot, még akkor sem hátrányos számára a játék.

Megjegyzés. Ennek a játéknak a következő „árveréses" változatát több osztályban is játszották. Ennek során a játékosok 300—300 pontos kiinduló tőkével rendelkeztek. A tanár minden játék előtt árverésre bocsátotta a játék jogát. Az a játékos játszhatott, aki a legnagyobb összeget ajánlotta ezért. A felajánlott pontokat természetesen még a játék előtt levonták a tőkéjükből. Ezután a játék konkrét lefolyásától függően nyert vagy vesztett valahányszor 50 pontot. Tanulságos lehet egy 7. osztályban szerzett tapasztalat ismertetése. Az első játék joga 130 pontért kelt el, amit harsány nevetés fogadott. Ezután 70—80 pontért kelt el néhány játék joga, ami a játékosoknak veszteséget eredményezett. A játékszenvedély továbbra is elég magasan tartotta a liciteket. Amikor kiderült, hogy 50 körüli tétekkel is vesztenek a játékosok, a felajánlott összeg drasztikusan lecsökkent: 1—3 pontért már meg lehetett venni a játék jogát. Ezek a játékosok nyertek. Ekkor ismét emelkedtek a tétek, majd megint csökkentek. Másfél órai játék után a tanulók következtetése az volt, hogy érdemes megvenni a játék jogát, mégpedig valamilyen 5 és 20 közötti pontért.

6. játék. Egy bankárnak két, külsőre egyforma doboza van, egyikben 1 piros és 3 kék, a másikban 3 piros és 1 kék golyó van. A két doboz közül kisorsolja a bankár az egyiket (1/2 – 1/2 valószínűséggel). A kiválasztott dobozt kell a játékosnak eltalálnia. Ha eltalálja, kap 10 Ft-ot, különben semmit. Módjában van a kiválasztott dobozból legfeljebb kétszer húzni visszatevéssel. Minden húzásért 1 Ft-ot kell azonban fizetnie.

Kérdés: Hány húzást kérjen a játékos, és hogyan döntsön ezek alapján? Keressük meg az optimális stratégiákat akkor is, ha a helyes tippért 10 Ft helyett c Ft-ot fizet a bank! Egy árveréses változatban mennyiért érdemes megvenni a játék jogát?

Ezekre a kérdésekre is, mint a többi megválaszolatlan kérdésre, az olvasóktól várjuk a válaszokat.

III.

7. játék. *Segít a véletlen.* Két játékos, Egyforma és Másforma a következő játékot játssza: Mindegyikük markába vesz 1 érmét, vagy nem vesz a kezébe egyet sem. Ezt természetesen úgy teszik, hogy a másik ne láthassa. Majd egyszerre kinyitják markukat, s megmutatják, hány érmét rejtettek el. Ha egyforma sokat, akkor Egyforma nyer Másformától, ha különbözőt, akkor Másforma nyer Egyformától. A nyeremény mindig annyi forint, ahány érmét összesen eldugtak. Egyforma nyereményét tehát a következő táblázattal adhatjuk meg.

Másforma dug \ Egyforma dug	0 érmét	1 érmét
0 érmét	0	-1
1 érmét	-1	2

A táblázatban a -1 azt jelenti, hogy ekkor Másforma nyer 1 Ft-ot. Másformának tetszik a játék: ha mindig 0 érmét rejt, akkor ő sohasem veszthet. Erre hamarosan Egyforma is rájön, s kijelenti, hogy ez a világ legunalmasabb játéka. Mindketten sorozatosan 0 érmét dugnak, senki sem nyer vagy veszít. Más-

formát azonban űzi a játékszenvedély, s megígéri, hogy elég gyakran fog dugni 1 érmét. Így már Egyformának is megtetszik a játék. Azt gondolja, hogy a játékok felében különbözőt dugnak, ekkor 1—1 Ft-ot veszít, a másik felében egyformát. Ezek felében, tehát az összes játékok negyedében mindketten 1 érmét dugnak, s ilyenkor ő nyer 2 Ft-ot. Ez átlagosan nullára jön ki, s ezért igazságosnak ítéli a játékot. Hosszú csatározás kezdődik köztük, mondhatnánk lélektani hadviselést folytatnak, igyekszenek kitalálni, mi lesz a másik markában. Bár mindegyikük többre értékeli saját ez irányú képességeit a másikénál, mégis előbb-utóbb felfedezik, hogy csak úgy tudják a másikat a legnagyobb kétségben hagyni, ha minden játék során újra és újra kisorsolják, hogy hány érmét fogjanak a markukba. S ezen a ponton mi is bekapcsolódunk csatározásukba. Azt szeretnénk megállapítani, szert tehet-e egyikük ilyen véletlen stratégia segítségével hosszú távon határozott nyeresége. Ha igen, mekkora a nyeremény várható értéke, s ehhez milyen valószínűségeloszlás szerint válassza ki, hogy hány pénzt kell dugnia. Mindjárt általános megoldásra törekszünk, ezért magát a játékot is általánosítjuk.

Legyen x és y két különböző nemnegatív szám. A játék során a játékosok vagy x számú vagy y számú pénzdarabot vehetnek a markukba. (Ilyen általános játékban a pénzdarabok „száma" akár π is lehet!) A játék többi szabálya érvényben marad, tehát Egyforma akkor nyer, ha mindketten ugyanannyi pénzdarabot dugtak, különben Másforma nyer. A nyeremény ismét az összes dugott érmék száma. Egyforma nyereményét megadó táblázat tehát:

Másforma érmei \ Egyforma érmei	x	y
x	$2x$	$-(x+y)$
y	$-(y+x)$	$2y$

Tegyük fel, hogy Egyforma p, Másforma q valószínűséggel vesz a markába x érmét, s számítsuk ki Egyforma nyereményének a várható értékét, amit E_{nyer}-rel jelölünk. Nyilvánvalóan feltehetjük, hogy a két játékos választása egymástól független, így a nyereményt a következő valószínűségi változó adja meg:

$$\begin{pmatrix} 2x & -(x+y) & 2y \\ p\cdot q & p(1-q)+q(1-p) & (1-p)(1-q) \end{pmatrix}.$$

Innen a várható érték:

$$E_{\text{nyer}} = E_{\text{nyer}}(p, q) = 2xpq-(x+y)[p(1-q)+q(1-p)]+2y(1-p)(1-q).$$

Azonos átalakítások után a következő adódik:

$$E_{\text{nyer}}(p, q) = p[4(x+y)q-(x+3y)]-q(x+3y)+2y.$$

Ha Másforma a

$$q_0 = \frac{x+3y}{4(x+y)}$$

valószínűséggel vesz a markába x érmét, akkor bármit is tesz Egyforma, nyereményének várható értéke ugyanaz a negatív szám lesz:

$$E_{\text{nyer}}(p, q_0) = -\frac{(x+3y)^2}{4(x+y)}+2y = -\frac{(x-y)^2}{4(x+y)}.$$

„Jó" véletlen stratégia esetén tehát Másforma átlagosan szert tehet legalább ekkora nyereményre. Kérdés már csak az, hogy megakadályozhatja-e Egyforma őt abban, hogy ennél többet nyerjen. A válasz: igen. Elegendő E_{nyer} következő átalakítását szemügyre venni:

$$E_{\text{nyer}}(p, q) = q[4(x+y)p-(x+3y)]-p(x+3y)+2y.$$

Látható, hogy $E_{\text{nyer}}(p, q)$ értéke nem függ q-tól, ha

$$p = p_0 = \frac{x+3y}{4(x+y)},$$

ekkor ugyanis:

$$E_{\text{nyer}}(p_0, q) = -\frac{(x-y)^2}{4(x+y)} = E_{\text{nyer}}(p, q_0).$$

A véletlen tehát nyereményhez juttatja Másformát, de Egyformát is segíti, amennyiben segítségével Egyforma minimalizálhatja Másforma nyereményét.

Az eredeti játékban $x=0$, $y=1$, tehát

$$q_0 = \frac{3}{4} \quad \text{és} \quad E_{\text{nyer}}\left(\cdot, \frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{4},$$

azaz Másforma játékonként átlagosan 25 fillér nyereségre számíthat. Természetesen olyan játszmák is lehetnek, amelyekben ő veszít. Így Másformának célszerű, ha előre megállapodnak abban, hogy sokszor, mondjuk n-szer játszanak, s itt n értékét úgy választja Másforma, hogy előre megadott valószínűséggel nyertesként hagyhassa abba a játékot. Ilyen n-et a jól ismert Csebisev-egyenlőtlenség is szolgáltat. Jelöljük az egyes játékokban Másforma nyereményét $\xi_1, \ldots, \xi_n$-nel. Feltehetjük a sorsolás módja miatt, hogy ezek a valószínűségi változók függetlenek. Ekkor az átlagos nyereményt megadó

$$\xi = \frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n},$$

valószínűségi változó $M(\xi)$ várható értékére és $D^2(\xi)$ szórásnégyzetére fennáll, hogy

$$M(\xi) = M(\xi_1) = \frac{1}{4} \quad \text{és} \quad D^2(\xi) = \frac{1}{n} D^2(\xi_1).$$

A Csebisev-egyenlőtlenség szerint

$$P\left\{|\xi - M(\xi)| \geqq \frac{1}{\sqrt{n\varepsilon}} D(\xi_1)\right\} \leqq \varepsilon.$$

Itt ε-t aszerint választhatjuk meg, hogy milyen nagy valószínűséggel akar Másforma „biztosra menni". Rögzített ε esetén n-et elegendő olyan nagynak választani, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{n\varepsilon}} D(\xi_1) < \frac{1}{4}, \quad \text{azaz} \quad \frac{16}{\varepsilon} D^2(\xi_1) < n$$

teljesüljön. Ehhez $D^2(\xi_1)$-et ismerni kell:

$$D^2(\xi_1) = M(\xi_1^2) - [M(\xi_1)]^2 = \frac{27}{16} - \frac{3}{2} p.$$

Ha Egyforma is a legjobb véletlen stratégiát követi, akkor $D^2(\xi_1)=\frac{9}{16}$, s így a játékok számára az $n>\frac{9}{\varepsilon}$ korlát adódik. $\varepsilon=0{,}1$ esetén $n=90$, illetve $\varepsilon=0{,}05$ esetén 180 játékot játszva Másforma legfeljebb 0,1, illetve 0,05 valószínűséggel lehet csak vesztes. Megjegyezzük, hogy a Csebisev-egyenlőtlenségnél hatékonyabb becslés segítségével azt nyerhetjük, hogy kb. 250 játék esetén Másforma nyerésének valószínűsége legalább 0,99. Ilyen hatékonyabb becslés lehet például a Csebisev-egyenlőtlenség Bernstein-féle élesítése (l. például Rényi idézett tankönyvét) vagy a centrális határeloszlás-tétel használata („3-szigmás határ").

Ilyen típusú becslések feltétlenül szükségesek a tanári munkában is. Ha egy átlagos létszámú osztályban minden tanuló 15-ször Egyforma szerepében játszik a Másforma szerepét vállaló tanár ellen, akkor a tanár elegendő biztonsággal számíthat arra, hogy a véletlen nem fogja „megviccelni", s összesítésben ő fog nyerni. Osztályban történő játék esetén a tanulók maguk „határozhatják meg" a tanár választását is. A játék úgy folyhat le, hogy saját választásukat leírják, majd utána sorsolják ki, hány érmét dug Másforma: két pénzdarabot feldobnak, s ha mindkettő fej, *egy* érmét dug Másforma, különben egyet sem. Természetesen minden játékhoz ismételten fel kell dobni a két pénzdarabot.

Radnainé Szendrei Júlianna A játék matematikája című könyvében (Tankönyvkiadó, 1976) az $x=1$ és $y=2$ értékekhez tartozó játékot vizsgálja. E könyvből iskolai szinten eredményesen tárgyalható további játékokat és elemzésük módszereit ismerheti meg az olvasó.

E rész lezárásaként két hasonló játékot ismertetünk, ennek során nem fosztjuk meg az olvasót a játék örömétől azáltal, hogy azokat részletesen megvizsgáljuk.

8. játék. Egyforma és Másforma most 1, 2, 3, 4 érmét vehet a kezébe. Ha egyforma sokat dugtak, akkor Egyforma nyer, mégpedig mindig 10-et. Különben Másforma nyer Egyformától, s nyereménye a dugott érmék száma közti különbség négyzete. (Ezt a játékot 1, 2, 3, 4 helyett 1, 2, ..., n érmével is lehet játszani. Legyen ekkor Egyforma nyereménye $\binom{n+1}{2}$.)

9. játék. Három játékos játszik, névszerint Első, s az ellene közösen fellépő Második és Harmadik. Első választ egy számot a 0, 1, 2, ..., n számok közül, jelöljük ezt E-vel, s ezt megmondja Másodiknak, de úgy, hogy Harmadik ne hallja meg. Ezután Második választ egy tetszőleges nemnegatív egész M számot, s közli Harmadikkal. Végül Harmadik is választ egy H egész számot. A három számtól függően Második és Harmadik közösen fizet Elsőnek

$$M+|E-H|-\frac{n+1}{3}$$

forintot. Első a játék megkezdésekor tetszőlegesen választhatja meg n értékét a 0, 1, ..., 9 számok közül, de ezt mindkét társának meg kell mondania.

DR. VARECZA ÁRPÁD
főiskolai docens
Nyíregyháza

A számozott pontú fák számáról

A Matematika Tanítása című folyóirat feladat rovatában a **900.** probléma öt számozott pontú fák leszámlálását tűzte ki célul. Természetes módon vetődik fel az a kérdés, hogy tetszőleges n esetén mit mondhatunk az n számozott pontú fák számáról. A problémát először CAYLEY ([3]) oldotta meg, és azóta a problémára több megoldás is született. (Lásd pl. [4] 4. fejezetét!) A következőkben a probléma két — talán legegyszerűbb — megoldását ismertetjük. A rövidség kedvéért a felhasználásra kerülő alap-

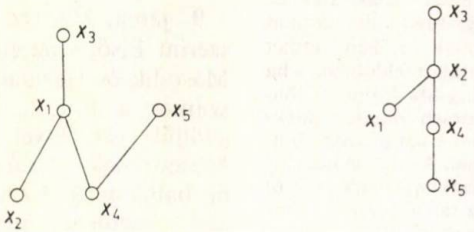
fogalmakat nem definiáljuk, ezek minden bevezető jellegű gráfelméleti könyvben megtalálhatók (pl. [1], [2], [5]).

Legyenek a továbbiakban $x_1, x_2, \ldots, x_n$ egy gráf szögpontjai, és jelölje $d(x_i)=d_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ az x_n szögpont fokát! A gráf éleinek száma legyen e. Ha egy gráf fa, akkor $1 \leqq d_i \leqq n-1$, és van legalább két olyan pontja, amelynek a foka 1.

A fa olyan pontjait, amelyeknek foka 1, a fa végpontjainak nevezzük. Az n pontú fák éleinek számára teljesül a

$$2e = \sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$$

egyenlőség. Két számozott pontú gráfot különbözőnek tekintünk, ha legalább egy élben különböznek. Ha viszont a nem számozott pontú fákat akarjuk meghatározni, akkor az egymással nem izomorf fákat keressük. Két gráfot — mondjuk G_1-et és G_2-t — izomorfnak nevezünk, ha van olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés G_1, G_2 ponthalmazai között, hogy G_2-ben akkor és csakis akkor köt össze él két pontot, ha a G_1-ben a megfelelő pontokat él köti össze. Az n pontú, nem számozott pontú fák számának meghatározása nehezebb probléma, mint a számozott pontú fák leszámlálása.



Az ábrán látható két gráf mint számozott pontú gráfok különbözők, de ha mint nem számozott pontúakat tekintjük, akkor megegyeznek, mivel izomorfak. A következőkben számozott pontú fákkal foglalkozunk.

Tegyük fel, hogy

$$d(x_1) \geqq d(x_2) \geqq \ldots \geqq d(x_n) \tag{1}$$

és $d(x_n)=1$, mivel van olyan pont, amelynek a foka 1.

Először azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy ha tetszőlegesen megadunk $d_1, d_2, \ldots, d_n$ $(d_i \geqq 1$ egész; $i=1, \ldots, n)$ értéket, mikor létezik olyan fa, amelynek szögpontjai éppen $d_1, d_2, \ldots, d_n$ fokúak, és ha létezik, akkor mennyi ezeknek a fáknak a száma?

Igazoljuk a következőket:

1. tétel (Menon tétele): Akkor és csakis akkor létezik n pontú, $d_1, d_2, \ldots, d_n$ fokokkal rendelkező fa, ha

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1). \tag{2}$$

2. tétel (Moon tétele): A $d_1, d_2, \ldots, d_n$ fokokkal rendelkező fák száma

$$\binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, \ldots, d_n-1}. \tag{3}$$

Bizonyítás: Először a **2.** tétel bizonyításával foglalkozunk, és ebből adódik majd az **1.** tétel bizonyítása is.

Ha létezik $d_1, d_2, \ldots, d_n$ fokokkal rendelkező fa, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1), \quad \text{amiből} \quad \sum_{i=1}^{n} (d_i - 1) = n-2$$

adódik. Tegyük fel tehát, hogy $\sum_{i=1}^{n} (d_i - 1) = n-2$, és jelölje a $d_1, d_2, \ldots, d_n$ fokú pontokkal rendelkező fák számát

(4) $$F(n: d_1, d_2, \ldots, d_n).$$

Az állítást n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Az $n=2$-re az állítás nyilván igaz. Tegyük fel, hogy $(n-1)$-re is igaz, és mutassuk meg, hogy akkor n-re is az! Jelölje F_i azoknak a $d_1, \ldots, d_n$ fokokkal rendelkező fáknak a halmazát, amelyekben az x_i pontot él köti össze az x_n ponttal, és legyen $|F_i|$ ezeknek a fáknak a száma!

A $d(x_i) > 1$, mivel $n > 2$, és ha $d(x_i) = 1$ lenne, akkor az x_i pontot csak az x_n ponttal kötné össze él, ezért a gráf nem lenne összefüggő. Az $|F_i|$-re (4) szerint

(5) $$|F_i| = F(n-1: d_1, d_2, \ldots, d_i - 1, \ldots, d_{n-1})$$

teljesül, mivel az F_i-ben szereplő fák felfoghatók úgy, hogy pontjaik az $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ pontok és fokuk rendre $d_1, d_2, \ldots, d_i - 1, \ldots, d_{n-1}$. Ha az F_i fáit kiegészítjük az x_n ponttal és az x_i pontot az x_n ponttal összekötő éllel, akkor minden F_i-beli fát megkapunk, és mindegyiket csak egyszer. Az F_i halmazok páronként diszjunktak, így

$$F(n: d_1, d_2, \ldots, d_n) = \Big| \bigcup_{i|d_i>1} F_i \Big| = \sum_{i|d_i>1} |F_i| = \sum_{i|d_i>1} F(n-1: d_1, \ldots, d_i - 1, \ldots, d_{n-1}).$$

Indukciós feltevésünk szerint viszont az állítás $(n-1)$-re igaz, és $d_n - 1 = 0$, ezért

$$F(n: d_1, d_2, \ldots, d_n) = \sum_{i|d_i>1} F(n-1: d_1, \ldots, d_i - 1, \ldots, d_{n-1}) =$$

$$= \sum_{i|d_i>1} \binom{n-3}{d_1 - 1, \ldots, d_i - 2, \ldots, d_{n-1} - 1} = \binom{n-2}{d_1 - 1, d_2 - 1, \ldots, d_n - 1}.$$

Ezzel igazoltuk a **2.** tételt.

Az **1.** tétel állítása abból következik, hogy

$$F(n: d_1, d_2, \ldots, d_n) \neq 0.$$

Ezzel az **1.** tétel is bizonyítást nyert.

3. tétel (Cayley tétele): Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontokkal rendelkező fák száma n^{n-2}.

Bizonyítás: A $d_1, d_2, \ldots, d_n$ fokokkal rendelkező fák száma a **2.** tétel szerint

$$\binom{n-2}{d_1 - 1, \ldots, d_n - 1},$$

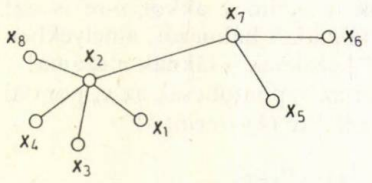
ahol $\sum_{i=1}^{n} (d_i - 1) = n-2$. Az összes lehetséges fokszám-sorozatot véve, és a hozzájuk tartozó fák számát összeadva

$$\sum_{\substack{d_1, \ldots, d_n \geq 1 \\ \sum_{i=1}^{n} (d_i - 1) = n-2}} \binom{n-2}{d_1 - 1, d_2 - 1, \ldots, d_n - 1} = (1 + \ldots + 1)^{n-2} = n^{n-2}$$

adódik, felhasználva a polinomiális tételt ([11], 65—67. oldal).

A következőkben röviden olyan bizonyításával foglalkozunk a **3.** tételnek, amely a fák számát $(a_1, \ldots, a_{n-1})$, $1 \leqq a_i \leqq n$, $a_{n-1} = n$ feltételeket kielégítő sorozatok számára vezeti vissza. E feltételeket kielégítő sorozatok száma viszont n^{n-2}, ami a **3.** tétel állítása. A bizonyítás gondolata PRÜFER-től ([8]) származik. RÉNYI a módszert — némi módosítással — más esetekben is sikerrel alkalmazta ([10]). Az eljárás megtalálható még például [9]-ben és [4] 4. fejezetében is.

Legyen F egy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontokkal rendelkező fa! Töröljük az F legkisebb indexű végpontját, és írjuk le a vele szomszédos pont indexét! Ismételjük az eljárást addig, amíg egypontú gráfhoz nem jutunk! Az így adódó $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ sorozatot az F fa Prüfer-kódjának nevezzük. Például az ábrán látható fa Prüfer-kódja (2, 2, 2, 7, 7, 2, 8), mivel legkisebb indexű végpontja x_1, és ennek szomszédja x_2. Az x_1-et törölve a legkisebb indexű végpont x_3, és ennek szomszédja is x_2. Az x_3-at törölve stb. (2, 2, 2, 7, 7, 2, 8) adódik.



Igazoljuk, hogy az 1, 2, ..., n számokból készíthető $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, $1 \leqq a_i \leqq n$, $a_{n-1} = n$ feltételeket kielégítő sorozatok és az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ szögpontú fák között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető.

Először azt látjuk be, hogy minden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontú fához egyértelműen rendelhető egy, a feltételeket kielégítő $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ sorozat.

Legyen F egy tetszőleges $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontokkal rendelkező fa! Az F Prüfer-kódjának előállításakor az elhagyott pontok indexei legyenek sorrendben

$$b_1, b_2, \ldots, b_{n-1},$$

és az $x_{b_1}, x_{b_2}, \ldots, x_{b_{i-1}}$ pontok elhagyásakor adódó gráfot — amely fa, mivel végpontokat hagyunk el — jelölje

$$F_i = F - \{x_{b_1}, \ldots, x_{b_{i-1}}\}. \tag{6}$$

Az x_{a_i}-t él köti össze x_{b_i}-vel, ezért $a_i \neq b_i$ és b_i különbözik $b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}$-től is. Ha a $j > i$, akkor $b_i \neq a_j$, és így ha

$$k \notin \{b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}, a_i, \ldots, a_{n-1}\},$$

akkor az x_k végpontja (6)-nak, és az eljárás szerint

$$b_i = \min\{k | k \notin \{b_1, \ldots, b_{i-1}, a_i, \ldots, a_{n-1}\}\}. \tag{7}$$

Így a b_i egyértelműen meghatározott, és (x_{b_i}, x_{a_i}) éle F-nek. Ebből következik, hogy az F Prüfer-kódja egyértelmű.

Legyen ezek után adott egy $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ sorozat, amelyre teljesülnek az $1 \leqq a_i \leqq n$, $a_{n-1} = n$ feltételek! Igazoljuk, hogy egyetlen olyan fa van, amelynek ez a Prüfer-kódja.

Definiáljuk b_i-t (7) által, és az x_{a_i} pontot kösse össze él az x_{b_i} ponttal $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$! Igazoljuk, hogy az így adódó gráf fa és Prüfer-kódja $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$! Az F_i gráfot definiálja (6) és az F_i ponthalmazát jelölje $V(F_i)$.

Az $x_{b_i} \in V(F_i)$ és $a_i \neq b_1, \ldots, b_{i-1}$ (7) szerint. Az x_{b_i}-nek van szomszédja F_i-ben, és ez csak x_{a_i} lehet. Valóban, ha lenne x_{b_i}-nek más szomszédja is F_i-ben — mondjuk x_{b_j} — akkor $j > i$ és $x_{b_j} \in V(F_i)$. Ez azt jelentené, hogy $b_i = b_j$ vagy $b_i = a_j$, és mindkettő lehetetlen (7) szerint. Az x_{b_i} végpontja tehát F_i-nek, ezért F és minden F_i is fa.

Igazoljuk még, hogy nincs F_i-nek b_i-nél kisebb indexű végpontja!

Tegyük fel, hogy van F_i-nek olyan x_k végpontja, amelyre $k<b_i$. Ekkor vagy $k=b_v$, $v<i$, ami lehetetlen (7) szerint, mivel $x_{b_v}\in V(F_i)$, vagy $k=a_j, j\geqq i$. Ez esetben $k<b_i\leqq n=a_{n-1}$ egyenlőtlenségből $j\leqq n-2$. Az előzők szerint viszont x_{b_j} végpontja F_j-nek, és szomszédja x_{a_j}. De feltevésünk alapján $x_{a_j}=x_k$ végpontja F_i-nek, ezért végpontja kell, hogy legyen F_j-nek is. Ebből $V(F_j)=\{x_{a_j}, x_{b_j}\}$ adódik, ami lehetetlen, mivel $|V(F_j)|=n-j+1\geqq n-(n-2)+1=3$.

Tehát F_i-nek nincs b_i-nél kisebb indexű végpontja, ami azt jelenti, hogy Prüfer-kódja $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$. Ezzel befejeztük a bizonyítást.

Irodalom

[1] *Andrásfai B.:* Ismerkedés a gráfelmélettel. Tankönyvkiadó, Bp., 1971
[2] *R. G. Busacker—T. L. Saaty:* Véges gráfok és hálózatok. Műszaki Könyvkiadó, Bp., 1969
[3] *A. Cayley:* A Theorem on Trees. Quart. J. Math., 23, 1889, 376—378.
[4] *Lovász, L.:* Combinatorial Problems and Exercises. Akadémiai Kiadó, Bp., 1979
[5] *Lovász L.—L. Vesztergombi K.—Pelikán J.:* Kombinatorika. Tankönyvkiadó, Bp., 1970
[6] *Menon, V. V.:* On the Existence of Trees with Given Degrees. Sankhya, 26, 1964, 63—68.
[7] *Moon J. W.:* Various Proofs of Cayley's Formula for Counting Trees. A Seminar on Graph Theory, ed. by F. Harary. Holt, Rinchart and Winston, 1967. 70—78.
[8] *A. Prüfer:* Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen, Archiv für Math. u. Phys. 27 (1918), 142—144.
[9] *Rényi A.:* Napló az információelméletről (összeállította Katona Gy.). Gondolat Kiadó, Bp., 1976
[10] *Rényi A.:* Új módszerek és eredmények a kombinatorikus analízisben I., II. MTA III. Oszt. Közl. 16 (1966), 77—105, 159—177.
[11] *Szele T.:* Bevezetés az algebrába. Tankönyvkiadó, Bp., 1975
[12] *I. Tomescu:* Kombinatorika és alkalmazásai. Műszaki Könyvkiadó, Bp., 1978

FELADATOK

Rovatvezető: Reményi Gusztáv

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Villányi út 74. IV. 23., 1113. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: a lap kézbesítésétől számított 20. nap.

927. Igazoljuk, hogy minden n pozitív egész számra teljesül az

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\binom{n+1}{2}} \leqq \prod_{k=1}^{n} k^k \leqq \left(\frac{2n+1}{3}\right)^{\binom{n+1}{2}}$$

egyenlőtlenséglánc!

Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény

928. Egy 3×3 mezőből álló sakktábla középső mezejére a 660 van írva. Írjunk a többi mezőre is egy-egy pozitív egész számot úgy, hogy olyan bűvös négyzet keletkezzék, amelynek sorai, oszlopai, illetve átlói az 1980-at adják összegül! Hány külön-

böző kitöltés lehetséges? Hány olyan van ezek közt, amelynek a kilenc számát nem csökkenő sorrendben felírva kilenctagú számtani sorozatot kapunk?

Bakos Tibor, Budapest

929. Bizonyítsuk be, hogy

$$\left(\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}k^2\right)-n(n-2)$$

osztható (2^n-1)-gyel, ha n pozitív egész szám!

Surányi János, Budapest

930. A háromszög szögeire teljesül a

$$\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma)=\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$$

egyenlet. Milyen összefüggés van a háromszög oldalai közt?

Schandl Gábor, Zalaegerszeg

931. Adva van egy ellipszis az AB, CD konjugált átmérőpárjával. Az ellipszis egy t érintője messe az AB és CD egyenest E-ben, illetve F-ben! Az E-n és F-en átmenő másik érintő legyen e, illetve f. Bizonyítsuk be, hogy e és f párhuzamosak!

Vigassy Lajos, Budapest

932. A C középpontú k körhöz a külső A pontból érintőket húzunk, az érintési pontok T, illetve T'. Az A ponton átmenő szelő messe k-t a P és Q pontban! Bizonyítsuk be, hogy érvényesek a

a) $$\frac{PT}{TQ}=\frac{PT'}{T'Q};$$

b) $$PT\cdot QT'=QT\cdot PT'=\frac{PQ\cdot TT'}{2}$$

összefüggések!

Feladatmegoldások (915—919.)

915. Oldjuk meg a

$$\text{(1)}\qquad \left(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}-\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}-\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right)=\left[\left\{\frac{2}{\pi}x\right\}\cdot 8-4\right]$$

egyenletet, ha $\{u\}$ az u törtrészét, $[u]$ pedig az u egészrészét jelenti!

Megoldás: Az (1) bal oldalán álló kifejezés akkor és csak akkor van értelmezve a valós számok halmazában, ha az

$$\text{(2)}\qquad \frac{1-\sin x}{1+\sin x}\geqq 0\wedge\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\geqq 0\wedge\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\geqq 0\wedge\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\geqq 0$$

konjunkció igaz. Ha valamelyik tört értéke az x_0 helyen 0 volna, akkor a számlálója itt 0 lenne, de akkor egy másik tört értelmetlenné válna, ezért (2)-ben sehol sem állhat fenn egyenlőség. Az

$$\frac{1-\sin x}{1+\sin x}>0,\quad\text{illetve az}\quad\frac{1+\sin x}{1-\sin x}>0$$

állítással ekvivalensek az

$$(1-\sin x)(1+\sin x)>0,$$

$$\cos^2 x>0$$

állítások. A legutóbbi az $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ ($k\in\mathbf{Z}$) értékek kivételével minden valós számra teljesül. A (2) alatti két utolsó egyenlőtlenség hasonlóan ekvivalens a $\sin^2 x>0$ egyenlőtlenséggel, amely az $x=\pi k$ ($k\in\mathbf{Z}$) számok kivételével mindig igaz.

Tehát az (1) bal oldalán álló kifejezés az $x=\frac{\pi}{2}k$ ($k\in\mathbf{Z}$) számok kivételével minden valós számhoz egy-egy valós számot rendel. Az ily módon megadott f függvény 2π szerint periodikus, ezért elég majd pl. a $[0;\ 2\pi]$ intervallumon megvizsgálni. Minden szóba jöhető x értékre teljesülnek az $1\pm\sin x>0$, $1\pm\cos x>0$ egyenlőtlenségek, ezért az (1) alatti négyzetgyökökre alkalmazhatjuk a $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ azonosságokat. Ilyen módon az (1) bal oldalának tényezőire a

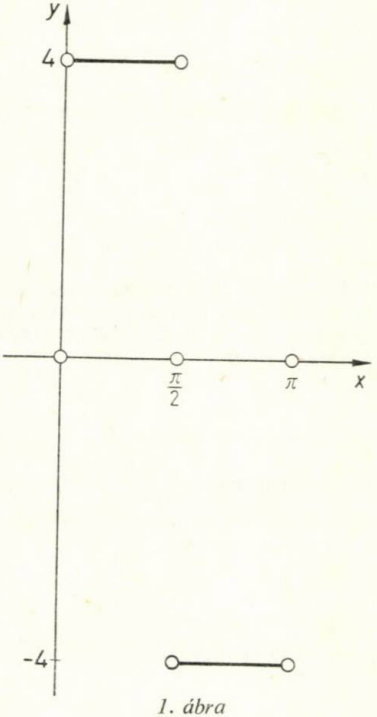
$$(3)\qquad \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}-\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}=-\frac{2\sin x}{|\cos x|},\quad \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}-\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}=-\frac{2\cos x}{|\sin x|}$$

szigorú azonosságokat kapjuk, tehát f-et az említett értelmezési tartományon megadja a

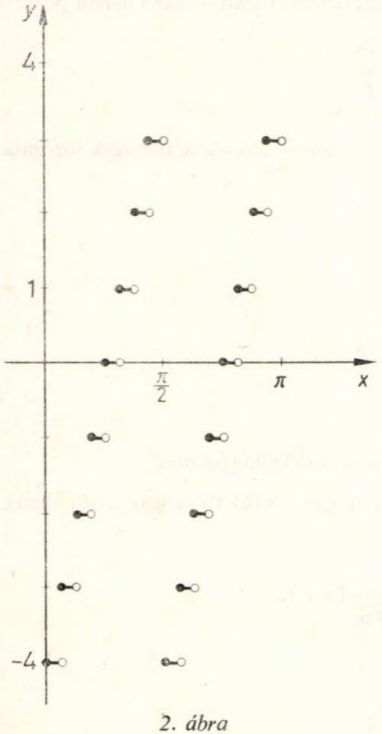
$$4\cdot\frac{\sin x\cdot\cos x}{|\sin x|\,|\cos x|},\quad \text{illetve a}\quad 4\cdot\frac{\sin 2x}{|\sin 2x|}$$

kifejezés is. Az utóbbiból kiderül, hogy az f π szerint periodikus. Ezért csak a $[0;\ \pi]$ intervallumon nézzük meg. Ezt kapjuk:

$$(4)\qquad f(x)=\begin{cases}4, & \text{ha}\quad 0<x<\frac{\pi}{2},\\ -4, & \text{ha}\quad \frac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$$



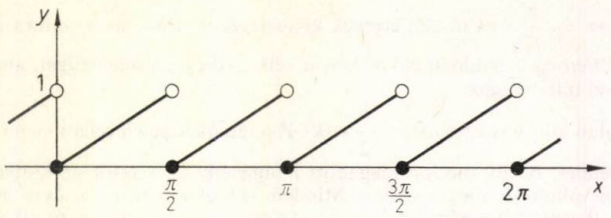
1. ábra



2. ábra

Az f grafikonját a $[0;\ \pi]$ intervallumra korlátozva az 1. ábra mutatja.

A jobb oldali kifejezés minden valós x-hez hozzárendel egy-egy valós számot. A vele meghatározott g függvényt is ábrázoljuk. Induljunk ki az $x\mapsto\{x\}$ függvény grafikonjából. Ha $\{x\}$ a tetszőleges x_0 helyen $\{x_0\}$ értékű, akkor $\left\{\frac{2}{\pi}x\right\}$ a $\frac{\pi}{2}x_0$ helyen veszi fel ugyanazt az értéket. Ennek következtében az első függvény ismert grafikonjából a másodikét úgy állíthatjuk elő, hogy y tengelyű $\frac{\pi}{2}$ arányú affinitást hajtunk végre (3. ábra). A kapott $\frac{\pi}{2}$ szerint pe-



3. ábra

riodikus függvényből a 8-cal való szorzással, majd a -4 hozzáadásával, végül a függvényértékek egészrészét véve megkapjuk g grafikonját (2. ábra; az f kedvéért a $[0; \pi]$ intervallumon ábrázoltuk).

Az 1. és a 3. ábrát ugyanabban a koordináta-rendszerben elhelyezve leolvashatjuk az (1) igazsághalmazát:

$$I = \left\{x: \frac{\pi}{2} + \pi k < x < \frac{9\pi}{16} + \pi k \wedge k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Imolya Sándor, Hódmezővásárhely

A megoldók száma: 14.

916. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n-re teljesül a

(1) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} < \frac{\pi}{\sqrt{6}} \sqrt{n}$$

egyenlőtlenség!

Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény

I. megoldás: A bal oldali n tagú összeg azt kínálja, hogy az n szám számtani közepét hasonlítsuk össze valamilyen nála nagyobb középpel. Ismeretes, hogy a kvadratikus közép nem kisebb nála, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a számok mind egyenlők. Eszerint igaz minden pozitív egész n-re, hogy

(2) $$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leqq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i}\right)^2}.$$

Ismert tétel, hogy a $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ pozitív tagú sor konvergens, és összege $\frac{\pi^2}{6}$. A részletösszegek sorozata szigorúan növekvő, tehát minden n-re teljesül a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < \frac{\pi^2}{6}$$

egyenlőtlenség. Ezt (2) jobb oldalára alkalmazva a

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2}} < \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$$

egyenlőtlenséghez, majd az egyenlőtlenséglánc tagjait n-nel szorozva (1)-hez jutunk.

II. megoldás: Próbálkozzunk teljes indukcióval! Tegyük fel, hogy $n = k (k \in \mathbf{P})$-ra igaz az (1) állítás, bizonyítsuk be, hogy akkor $n = k+1$-re is igaz:

(3), (4) $$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} < \frac{\pi}{\sqrt{6}} \sqrt{k} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i} < \frac{\pi}{\sqrt{6}} \sqrt{k+1}.$$

A (3) állítással ekvivalens a

(5) $$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i} < \frac{\pi}{\sqrt{6}} \sqrt{k} + \frac{1}{k+1}$$

egyenlőtlenség. Kíséreljük meg kimutatni, hogy (5) jobb oldala nem nagyobb (4) jobb oldalánál, mert ha ez sikerül, akkor (4) érvényessége igazolást nyert a (3) feltevés alapján. A

$$\frac{\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{k}+\frac{1}{k+1} \leqq \frac{\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{k+1} \tag{6}$$

egyenlőtlenséggel ekvivalens az

$$\frac{1}{k+1} \leqq \frac{\pi}{\sqrt{6}}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}),$$

illetve a

$$\frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}{k+1} \leqq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \tag{7}$$

egyenlőtlenség. (A (7) az előzőből a pozitív $(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})$-val való szorzással jött létre.) Ha a (7) bal oldalát — $\sqrt{k}$ helyett $\sqrt{k+1}$-et véve — növeljük, jobb oldalát pedig csökkentjük, és az így nyert

$$\frac{2}{\sqrt{k+1}} \leqq \frac{3}{\sqrt{6}} \tag{8}$$

egyenlőtlenséget igazoljuk, akkor ezzel (7), illetve (4) fennállása is bizonyítva lesz. De a (8) ekvivalens az

$$\frac{5}{3} \leqq k$$

egyenlőtlenséggel. Ha tehát $k>1$, akkor a (3)⇒(4) implikáció igaz, azaz az (1) tulajdonság k-ról öröklődik $(k+1)$-re.

Kell azonban találnunk olyan 1-nél nagyobb egész számot, amelyre (1) igaz. A $k=2$ eset már ilyen: $1+\frac{1}{2}<\frac{\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{2}$, azaz $\sqrt{27}<2\pi$ igaz.

A teljes indukció azt adta, hogy 1-nél nagyobb egész számokra igaz az (1). De 1-re nyilvánvalóan teljesül, tehát a feladat állítását igazoltuk.

I. megjegyzés: Bartha Gábor és Bogdán Zoltán a következő élesebb egyenlőtlenséget igazolta:

$$1+\int_1^n \frac{1}{x}\,dx < \frac{\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{n} \quad (n\in\mathbf{P}). \tag{9}$$

II. megjegyzés: A (9) bizonyítása során az $x \mapsto \frac{1+\ln x}{\sqrt{x}}$ függvény vizsgálata azt adja, hogy (1) jobb oldalán $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$ helyett vehetjük a nála kisebb $\frac{1+\ln 2}{\sqrt{2}}$ állandót is.

Bogdán Zoltán, Cegléd

III. megjegyzés: Az (1)-ben $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$ helyett $\frac{3}{4}\sqrt{2}$-t véve $n=2$-nél egyenlőség lép fel, más n-ekre a szigorú egyenlőtlenségjel érvényes; $\frac{3}{4}\sqrt{2}$-nél nagyobb állandó mellett minden n-re szigorú egyenlőtlenség áll fenn.

Hoffer János, Budapest és Sugár György, Budapest

IV. megjegyzés: Az (1) bal oldalán általánosan a $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^k}$ összeget véve a Cauchy—Bunyakovszkij—Schwarz-féle egyenlőtlenség segítségével ezt kaphatjuk:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^k} < \sqrt{n\zeta(2k)} \quad (k>1),$$

ahol $\zeta(\alpha)$ a $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{\alpha}}$ sor $\alpha > 1$ esetén létező véges összegét jelenti. Mint ismeretes, $\zeta(2k)$ előállítható a Bernoulli-számokkal:

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2 \cdot (2k)!} B_{2k}$$

(l. például *Szász Pál:* A differenciál- és integrálszámítás elemei, Bp., 1951. I. kötet 685. oldal). Könnyen nyerhetjük az (1) következő általánosítását is:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} < \sqrt[k]{n^{k-1}\zeta(k)}.$$

Bencze Mihály, Brassó

A megoldók száma: 22.

917. Van-e olyan pozitív egész számokból álló (x, y, u, v) számnégyes, amely kielégíti az $x^2+y^2 = 3(u^2+v^2)$ egyenletet?

I. megoldás: Az a kísérletezés, hogy találjunk megoldást, nem vezet eredményre. Az a sejtésünk alakul ki, hogy nincs ilyen számnégyes. Ennek bizonyítására tegyük fel, hogy egy (x_0, y_0, u_0, v_0) pozitív egész számokból álló számnégyes megoldás, és próbáljunk meg ellentmondáshoz jutni. Feltevésünk azt jelenti, hogy

$$x_0^2+y_0^2 = 3(u_0^2+v_0^2) \tag{1}$$

teljesül, ebből következik, hogy igaz a

$$3 \mid x_0^2+y_0^2 \tag{2}$$

reláció. Nézzük meg, hogy x_0 és y_0 milyen lehet a 3-mal való oszthatóság szempontjából. Ha egyik sem volna osztható 3-mal, azaz $x_0 = 3a \pm 1$, $y_0 = 3b \pm 1$ volna, akkor $x_0^2+y_0^2$ $3c+2$ alakú lenne (a, b, c nemnegatív egészek); ha az egyik osztható volna, a másik nem, akkor $x_0^2+y_0^2$ $3c+1$ alakú volna. Mindkét eset ellentmondana (2)-nek, tehát csak a harmadik eset állhat fenn: $3 \mid x_0 \wedge 3 \mid y_0$. Ebből következik, hogy van olyan x_1, y_1 pozitív egész szám, hogy $x_0 = 3x_1 \wedge y_0 = 3y_1 \wedge x_1 < x_0 \wedge y_1 < y_0$ teljesül. Ezeket (1)-be írva

$$3(x_1^2+y_1^2) = u_0^2+v_0^2 \tag{3}$$

fennállása következik. Most u_0, v_0-ra alkalmazzuk az előbb x_0, y_0-ra nyert eredményünket: (3) érvényessége folytán igaz, hogy $3 \mid u_0 \wedge 3 \mid v_0$, és van olyan u_1, v_1 pozitív egész számpár, hogy $u_0 = 3u_1 \wedge v_0 = 3v_1 \wedge u_1 < u_0 \wedge v_1 < v_0$ fennáll. Ezeket (3)-ba írva érvényes az

$$x_1^2+y_1^2 = 3(u_1^2+v_1^2) \tag{4}$$

egyenlet. Azt kaptuk, hogy egy pozitív egész megoldás létezéséből következik csupa kisebb számokból álló pozitív egész megoldás létezése.

Eredményünk most már könnyen ellentmondáshoz vezet. Ha ugyanis van az egyenletnek pozitív egész számokból álló megoldása, akkor kisebb pozitív egészekből álló megoldása csak véges sok lehet (ebben az is benne van, hogy esetleg 0 db van), előző okoskodásunk értelmében viszont végtelen sok van.

Ez az ellentmondás bizonyítja azt a sejtést, hogy a vizsgált egyenletnek nincs pozitív egész megoldása.

A bizonyítás alapgondolata sokszor alkalmazható, a descente infinie nevet viseli.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

II. megoldás: Az *I.* megoldásban végzett vizsgálat más úton is ellentmondáshoz vezet. Az (1)-ből, (3)-ból és (4)-ből következik, hogy érvényes az

$$x_0^2+y_0^2 = 3(u_0^2+v_0^2) = 3^2(x_1^2+y_1^2) = 3^3(u_1^2+v_1^2)$$

egyenletlánc. De ugyanúgy, ahogyan az (1)-ből a (4)-hez jutottunk, kaphatjuk azt, hogy az x_2, y_2, u_2, v_2 pozitív egészekkel az $x_0^2+y_0^2 = 3(u_0^2+v_0^2) = 3^2(x_1^2+y_1^2) = 3^3(u_1^2+v_1^2) = 3^4(x_2^2+y_2^2) = 3^5(u_2^2+v_2^2)$ egyenletlánc is fennáll. Nyilvánvaló, hogy az eljárásnak nem szakad vége. Eszerint a kiindulási $x_0^2+y_0^2$ pozitív egész szám prímhatványtényezős felbontásában 3-nak bármekkora pozitív egész kitevőjű hatványa előfordulhatna, ami lehetetlenség.

Zalán Péterné, Budapest

III. megoldás: Az *I.* megoldás módján indulva abból, hogy $3|x_0 \wedge 3|y_0$ fennáll, arra is következtethetünk, hogy $x_0 = 3^p x_1 \wedge y_0 = 3^q y_1$ érvényes úgy, hogy $3 \nmid x_1 \wedge 3 \nmid y_1$ és x_1, y_1, p, q pozitív egészek. Akkor igaz az

$$x_0^2 + y_0^2 = 3^{2p} x_1^2 + 3^{2q} y_1^2,$$

illetve $p \geqq q$ esetén az

$$x_0^2 + y_0^2 = 3^{2q}(3^{2(p-q)} x_1^2 + y_1^2)$$

előállítás. Minthogy x_1, y_1 3-mal maradékosan osztva 1 vagy -1 maradékot ad, ezért x_1^2, y_1^2 1-et ad, ebből következően a 3^{2q} melletti tényező 2-t vagy 1-et ad aszerint, hogy $p = q$ vagy $p \neq q$. A $q \geqq p$ esetben hasonlóan járhatunk el. Azt kaptuk, hogy $x_0^2 + y_0^2$ prímhatványtényezős felbontásában a 3 kitevője pozitív páros szám.

Az (1) teljesüléséből (3)-ra következtethetünk. Ekkor az előbbi okoskodás szerint $u_0^2 + v_0^2$ prímhatványtényezős felbontásában a 3 kitevője pozitív páros szám, de akkor (1) alapján $x_0^2 + y_0^2$ felbontásában a 3 kitevője páratlan, ami ellentmond az előbb nyert eredménynek.

Bartha Gábor, Szentendre és Sugár György, Budapest

IV. megoldás: Az (1) teljesülését feltételezve jelöljük a négy pozitív egész szám legnagyobb közös osztóját l-lel, akkor fennállnak az $x_0 = la$, $y_0 = lb$, $u_0 = lc$, $v_0 = ld$ egyenletek, ahol $(a, b, c, d) = 1$, $l \in \mathbf{N}^+$. Ezeket az (1)-be írva ahhoz jutunk, hogy érvényes az $a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$ összefüggés. Az *I.* megoldás gondolatmenete arra vezet, hogy $3|a \wedge 3|b$, majd arra, hogy $3|c \wedge 3|d$ is igaz, és ez ellentmond annak, hogy a, b, c, d relatív prímek.

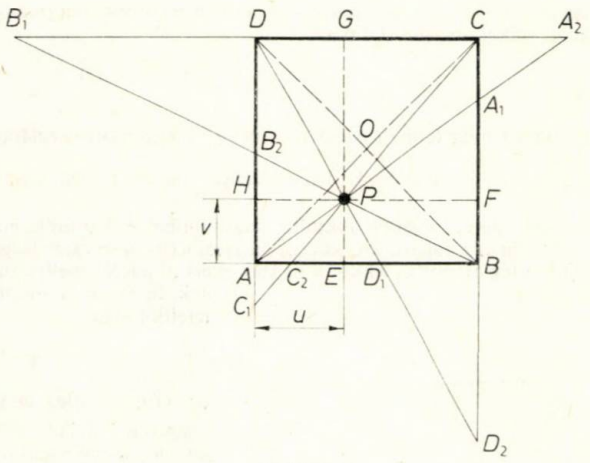
Hárspatakiné Dékány Veronika, Budapest,
Hoffer János, Budapest és Polcz Katalin, Pécs

A megoldók száma: 15.

918. Kössük össze az $ABCD$ négyzet belsejében levő, de az átlókra nem illeszkedő P pontot a csúcsokkal! A négy egyenes mindegyike egy-egy pontban metszi a két szemközti oldalegyenest. Írjuk fel a nyolc metszéspont osztóviszonyát az AB, BC, CD, illetve DA pontpárra vonatkozólag! Mekkora a nyolc osztóviszony szorzata?

Fitos László, Nyíregyháza

Megoldás: Mint ismeretes, a P közönséges pontnak az A, B alappontokra vonatkozó (ABP) osztóviszonyát az AB egyenes B-től különböző pontjaira az $\frac{AP}{PB}$ hányadossal definiáljuk, ahol AP és PB irányított szakaszok előjeles hosszát jelenti. Ha az AB egyenes irányítását az ellenkezőjére változtatjuk, akkor az (ABP) érték változatlan marad. (Itt AB a tér bármely egyenesét jelenthette.)



4. ábra

Az előbb említettek értelmében az adott négyzet oldalegyeneseit egymástól függetlenül tetszőlegesen irányíthatjuk. A felvett P pont legyen az OAB részháromszög belső pontja, ezt átbetűzéssel mindig elérhetjük (4. ábra). A PA egyenes a négyzet P-vel szemközti oldalegyeneseit mindig metszi, a BC oldalt belső pontban (A_1), a CD szakasznak pedig a C-n túli meghosszabbítását ugyancsak belső pontban (A_2), ezért a (BCA_1) pozitív, a (CDA_2) pedig negatív. Hasonló a helyzet a PB, PC, PD egyeneseknél is. A nyolc osztóviszony közül tehát négy mindig pozitív, négy pedig negatív, tehát a szorzatuk pozitív. A továbbiakban ezekután elég figyelemmel kísérni az egyes szakaszok hosszát.

A keresett szorzatot az osztóviszony definíciója alapján így írhatjuk fel:

$$(1) \qquad (ABD_1)(ABC_2)(BCA_1)(BCD_2)(CDB_1)(CDA_2)(DAC_1)(DAB_2) =$$

$$= \frac{AD_1}{D_1B} \cdot \frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{BD_2}{D_2C} \cdot \frac{CB_1}{B_1D} \cdot \frac{CA_2}{A_2D} \cdot \frac{DC_1}{C_1A} \cdot \frac{DB_2}{B_2A}.$$

A P pont távolsága az AD egyenestől legyen u, az AB-től v. Húzzuk meg a P-n át a négyzet oldalegyeneseivel párhuzamos egyeneseket! Az (1) alatt szereplő 16 szakaszból kettő-kettőnek az arányát hasonló háromszögekből az a négyzetoldallal, u-val és v-vel fejezzük ki. Egyszerűség kedvéért az abszolútérték-jeleket elhagyjuk.

$$\frac{AC_2}{C_1A}=\frac{a-u}{a-v}\quad(AC_1C_2\triangle\sim GPC\triangle),\qquad \frac{CA_2}{A_1C}=\frac{u}{v}\quad(CA_1A_2\triangle\sim HAP\triangle),$$

$$\frac{BD_2}{D_1B}=\frac{a-v}{u}\quad(BD_1D_2\triangle\sim GDP\triangle),\qquad \frac{DB_2}{B_1D}=\frac{v}{a-u}\quad(DB_1B_2\triangle\sim FPB\triangle).$$

Az előbbiek szorzata 1. A hátralevő szakaszok arányai pedig:

$$\frac{AD_1}{DA_2}=\frac{v}{a-v}\quad(AD_1P\triangle\sim A_2DP\triangle),\qquad \frac{CB_1}{BC_2}=\frac{a-v}{v}\quad(CB_1P\triangle\sim C_2BP\triangle),$$

$$\frac{BA_1}{AB_2}=\frac{a-u}{u}\quad(BA_1P\triangle\sim B_2AP\triangle),\qquad \frac{DC_1}{CD_2}=\frac{u}{a-u}\quad(DC_1P\triangle\sim D_2CP\triangle).$$

Ezek szorzata is 1.

Tehát a nyolc osztóviszony szorzatának értéke: 1.

Gaál László, Valkó

A megoldók száma: 13.

919. Adott körszeletben szerkesszük meg a legnagyobb területű téglalapot úgy, hogy egyik oldala a körszelet húrján legyen, a másik két csúcsa pedig illeszkedjék a körszeletet határoló körívre!

Megoldás: A körszelet vagy félkör, vagy kisebb, vagy pedig nagyobb félkörnél.

a) Félkör esetén az 5. ábra szerinti jelöléssel a $2xy$ szorzat maximumát keressük, ha $0<x<r$, $0<y<r$, $x^2+y^2=r^2$ teljesülnek. A $2x\sqrt{r^2-x^2}$ kifejezés helyett elég az $x\sqrt{r^2-x^2}$, illetve a vele azonosan egyenlő $\sqrt{x^2(r^2-x^2)}$ kifejezést vizsgálni. A legutóbbi két pozitív szám mértani közepe, ezt a számtani közepükkel összehasonlítva a

$$\sqrt{x^2(r^2-x^2)}\leqq\frac{r^2}{2}$$

egyenlőtlenség fennáll minden, a $0<x<r$ egyenlőtlenségláncot kielégítő x-re, mégpedig úgy, hogy egyenlőség akkor és csak akkor érvényes, ha $x^2=r^2-x^2$, azaz $x=\frac{r}{\sqrt{2}}$ igaz. Ekkor a téglalap két négyzet egyesítése. Egyetlen abszolút maximumhelyet kaptunk, ennek szerkesztése könnyű.

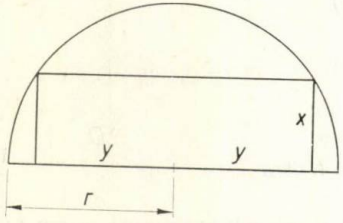
b) Ha az r sugarú kör középpontjától $u\,(0<u<r)$ távolságra halad a szelő és a kisebb körszeletbe írjuk a téglalapokat, akkor a 6. ábra szerinti jelölés mellett most is a $2xy$ szorzat maximumát keressük, ha $0<x<r-u$, $0<y<r$, és fennáll köztük a magasságtételből nyert

$$y=\sqrt{(r+u+x)(r-u-x)}$$

összefüggés. Elég az xy szorzatot vizsgálni. Vigyük az x-et a négyzetgyökjel alá, és az $u\mapsto\sqrt{u}$ függvény tulajdonságai alapján elég megvizsgálnunk az

$$f\colon x\mapsto x^2(r^2-(u+x)^2)\quad(0<x<r-u)$$

függvény menetét. Az f-et így is megadhatjuk:



5. ábra

(1) $$f\colon x\mapsto -x^4-2ux^3+v^2x^2\quad(0<x<r-u).$$

Ennek deriváltja:

(2) $$f'\colon x\mapsto -4x^3-6ux^2+2v^2x\quad(0<x<r-u).$$

Célszerű az f-et kiterjeszteni a $[0;r-u]$ zárt intervallumra, hogy Weierstrass tételét alkalmazhassuk (zárt intervallumon definiált folytonos függvény itt felveszi az abszolút maximumát). Az (1) alatti f-nek mint polinomfüggvénynek van jobb oldali határértéke a 0 helyen, és bal oldali határértéke

az $r-u$ helyen (mindkettő 0), vegyük ezeket függvényértékeknek. Az így kapott új függvényre tartsuk meg az f jelet. Geometriailag az történt, hogy a 0 magasságú, illetve 0 alapú elfajult téglalapokat is besoroltuk a vizsgált téglalapok közé. Az új f most már folytonos a $[0; r-u]$ intervallumon, tehát ezen felveszi az abszolút maximumát, mégpedig vagy a végpontokban, vagy belső pontban. Keressük meg f' zérushelyeit a $(0; r-u)$ intervallumban! Egyetlen érték lehetséges:

$$x_2 = \frac{-3u+\sqrt{9u^2+8v^2}}{4} = \frac{-3u+\sqrt{8r^2+u^2}}{4};$$

ennek első alakjából látszik, hogy pozitív, de még meg kell néznünk, hogy az intervallumba esik-e. Az $x_2 < r-u$ egyenlőtlenségről könnyen látszik, hogy ekvivalens az $u < r$ egyenlőtlenséggel, tehát a kérdésre a válasz igenlő. Ezekután az f'-t ilyen alakban is megadhatjuk:

(3) $\quad f'\colon x \mapsto -4x(x-x_2)(x-x_3) \quad (0 < x < r-u),$

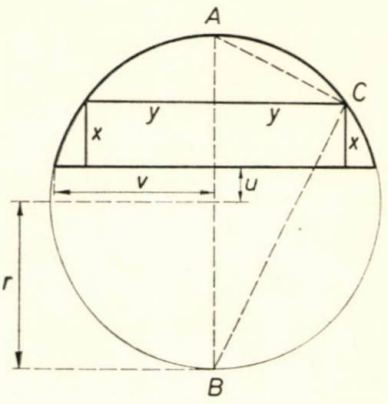
ahol x_3 negatív állandó. A (3) az f' előjelviszonyairól a következő felvilágosítást adja:

x	0	$(0; x_2)$	x_2	$(x_2; r-u)$	$r-u$
f'	nem létezik	+	0	−	nem létezik

Ebből ismert tételek alapján f-re a következőt kapjuk:

f	0	↗ szig.	szig. lokális max.	↘ szig.	0.

Ezek szerint az x_2 hely szigorú abszolút maximumhely is. Az x_2-t könnyen megszerkeszthetjük Pitagorasz tételének felhasználásával.



6. ábra

c) Ha a 6. ábra alsó körszeletében helyezzük el a téglalapokat, akkor járjunk el a *b)* esethez hasonlóan (7. ábra, az adott kör sugara r). Most is a $2xy$ szorzat abszolút maximumát keressük, ha teljesülnek a $2u \leqq x < r+u$, $0 < y \leqq v$, $y = \sqrt{(r-u+x)(r+u-x)}$ feltételek.

A 2-t hagyjuk el, x-et vigyük a gyökjel alá, és vizsgáljuk az

(4) $$f\colon x \mapsto -x^4+2ux^3+v^2x^2 \quad (2u \leqq x \leqq r+u)$$

függvényt (az $x = r+u$-t is bevettük, amely elfajult téglalapnak felel meg). A deriváltja:

(5) $$f'\colon x \mapsto -4x^3+6ux^2+2v^2x \quad (2u < x < r+u).$$

Az f' most is csak egy helyen lehet zérus:

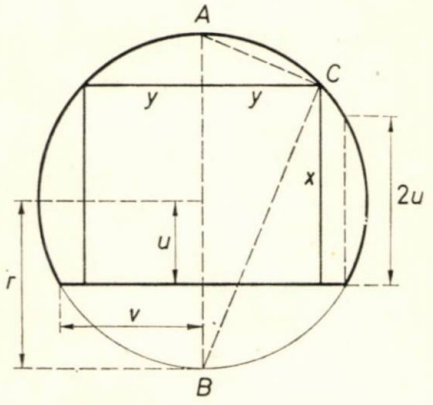
$$x_2 = \frac{3u+\sqrt{8r^2+u^2}}{4};$$

meg kell néznünk, hogy az intervallumba esik-e. Az $x_2 < r+u$ egyenlőtlenségről könnyű kimutatni, hogy ekvivalens a $0 < 8r(r+u)$ egyenlőtlenséggel, amely teljesül; a

(6) $$2u < x_2$$

egyenlőtlenség azonban ezzel ekvivalens:

(7) $$u < \frac{r}{\sqrt{3}}.$$



7. ábra

Nézzünk meg két esetet.

I. Ha $u < \frac{r}{\sqrt{3}}$, akkor $2u < x_2 < r+u$; az f' szorzatalakja:

(8) $$f': x \mapsto -4x(x-x_2)(x-x_3) \quad (2u < x < r+u),$$

ahol $x_3 < 0$. Az említett tételek alapján:

x	$2u$	$(2u; x_2)$	x_2	$(x_2; r+u)$	$r+u$
f'	nem létezik	+	0	−	nem létezik
f	+	↗ szig.	szig. lok. max.	↘ szig.	0

Világos, hogy az x_2 hely szigorú abszolút maximumhely is.

II. Ha $u \geqq \frac{r}{\sqrt{3}}$, akkor $x_2 \leqq 2u$, azaz a $(2u; r+u)$ intervallumban f'-nek nincs zérushelye. Az előbbi tételek értelmében:

x	$2u$	$(2u; r+u)$	$r+u$
f'	nem létezik	−	nem létezik
f	+	↘ szig.	0

tehát a $2u$ hely szigorú abszolút maximumhely.

A szerkesztés a számítások után a *c)* esetben is könnyű.

Ezzel teljes megoldást adtunk a feladatra.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

Megjegyzés: Több megoldó a megfogalmazásban nem tesz éles különbséget abszolút és lokális maximumhely között.

A megoldók száma: 17.

920. feladat megoldását helyszűke miatt a következő számban közöljük.

A megoldók névsora (915—920.)

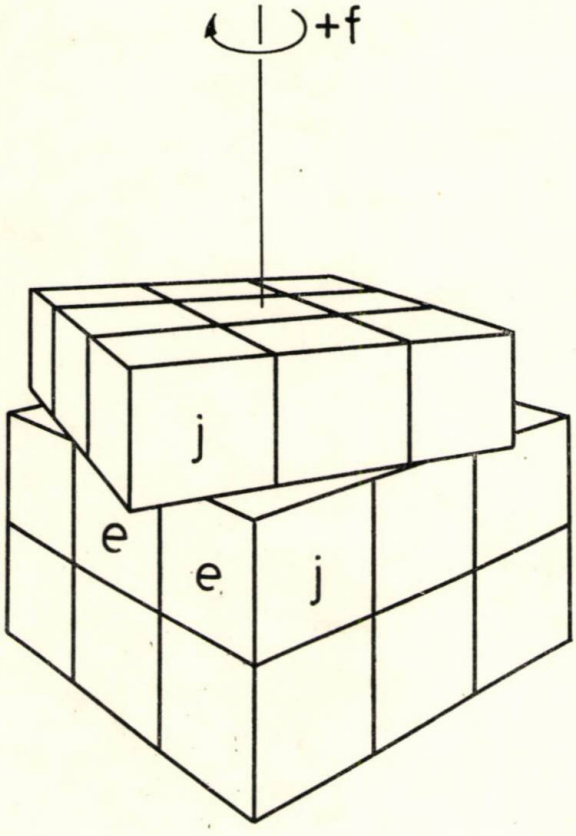
Bartha Gábor, Szentendre (915—920.); Bencze Mihály, Brassó (916.); Bodnár György, Szerencs (915., 916.); Bogdán Zoltán, Cegléd (916. két mód, 917—920.); Filetóth István, Nyíregyháza (917., 919.); Gaál László, Valkó (915—920.); Hárspatakiné Dékány Veronika, Budapest (915., 917., 918.), Hoffer János, Budapest (915—917.); Ihász László, Nagybajom (915., 916., 918—920.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (915—919.); Kacsó Ferenc, Marosvásárhely (915—920.); Kishalmi Rózsa, Hódmezővásárhely (915.); Kondor Judit, Budapest (916., 918—920.); Kotek Lászlóné, Pécs (916., 919.); Kozmáné Tegez Rita, Tatabánya (917.); Kun Péter, Szentendre (915., 916., 919., 920.); Molnár József, Szombathely (916.); Moyzes Károly, Szeged (920.); Nagy Vilmos, Gyergyó (916.); Németh László, Zalaegerszeg (915—917.); Nyírő László, Mezőkövesd (916., 917., 919.); Polcz Katalin, Pécs (915—919.); Sugár György, Budapest (915—917.); Szánthó Gyula, Gyula (916—919.); dr. Szikszai József, Miskolc (920.); Szlízs Róbert, Galánta (916.); Vermes Miklós, Budapest (919.); Vigassy Lajos, Budapest (918., 919.); Zalán Péterné, Budapest (915—920.); Zsidó György, Kolozsvár (916., 918., 919.).

Lapunk 1978. és 1979. évi legeredményesebb feladatmegoldóit könyvjutalomban részesítettük. A jutalmazottak: Bartha Gábor, Szentendre; Bogdán Zoltán, Cegléd; Gaál László, Valkó; Imolya Sándor, Hódmezővásárhely; Kacsó Ferenc, Marosvásárhely; Polcz Katalin, Pécs; Szánthó Gyula, Gyula.

INDEX: 25 565

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



VEGYIPARI KÖNYVTÁR

1980. augusztus * XXVII. évfolyam 4 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS LÁSZLÓ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PALMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, REMÉNYI GUSZTÁV, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200.
80-2266 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

ISSN 0461—3902

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalban, a kézbesítőknél és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím: Budapest, V., József nádor tér 1. — 1900) személyesen vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-9o162 pénzforgalmi jelzőszámra. Előfizetési díj egész évre 27,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 4,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Dr. Surányi János: A következő tantervi reform előkészítése a középiskolai matematikaoktatás területén 97
Kovács Zoltán: Zsebszámolók programjainak elágaztatása 102
Dr. Hosszú Miklós: A bűvös kocka 107
„Matematikatanárok versenyé"-nek 1979. évi győztesei 111
A Bolyai János Matematikai Társulat versenye matematikatanárok számára 111
Az Iskolarádió matematika tárgyú adásai az 1980—81. tanévben 113
Rozgonyi Tibor: Jelentés a Tanárképző Főiskolák 1980. évi Országos Matematikai Tanulmányi Versenyéről 115
Közlemény 121

FELADATOK 121

СОДЕРЖАНИЕ

Д-р. Шурани Янош: Предготовление следующего реформы программ математики в старших классах 97
Ковач Золтан: Разветвление программ для миникалькуляторов 102
Д-р. Хоссу Миклош: Волшебный куб .. 107
Победители «Соревновании учителей математики» в г. 1979 111
Соревнование Математического Общества им. Яноша Бояи для учителей математики 111
Математические передачи Учебного Радио в учебном году 1980—81 113
Розгоньи Тибор: Отчет о Математическом Соревновании Педагогических Институт в году 1980. 115
Сообщение 121

ЗАДАЧИ 121

INHALT

Dr. Surányi, János: Die Vorbereitung der nächsten Lehrplan-Reform auf dem Gebiete des Mathematikunterrichtes in den Mittelschulen 97
Kovács, Zoltán: Verzweigungen in den Programmen der Taschenrechner 102
Dr. Hosszú, Miklós: Der magische Würfel 107
Die Sieger des «Wettbewerbes für Mathematiklehrer» im Jahre 1979. 111
Der Wettbewerb der János Bolyai Mathematischen Gesellschaft für die Mathematiklehrer 111
Mathematik-Sendungen des Schulrundfunks im Schuljahre 1980—81. 113
Rozgonyi, Tibor: Bericht über den Mathematik—Wettbewerb der Pädagogischen Hochschulen im Jahre 1980. 115
Mitteilung 121

AUFGABEN 121

DR. SURÁNYI JÁNOS
tanszékvezető egyetemi tanár
ELTE

A következő tantervi reform előkészítése a középiskolai matematikaoktatás területén

1. A Matematika Tanítása hírt adott néhány éve egy középiskolai matematikatanítási kísérletről [1], [2]. A kísérlet azóta rendszeresen folyik. Budapesti gimnáziumok mellett néhány vidéki is és néhány szakközépiskola is részt vesz benne. Közreműködő pedagógusok többször számoltak be munkájukról a Bolyai János Matematikai Társulat tanári vándorgyűlésein és egyebütt. A vándorgyűlések résztvevői a kísérletről tájékozódhattak annak tapasztalatcsere kiadványa, az „Útközben" egy-egy számából is. Erről a kísérletről, jelenlegi állásáról, további tervekről számolunk be az alábbiakban.

A kísérletet az Oktatási Minisztérium felkérésére a Bolyai Társulat indította 1973 őszén. A Társulat felkérte Matematika-módszertani Kutató Csoportunkat közreműködésre. Éppen abban az időben állította fel a Magyar Tudományos Akadémia Elnökségi Közoktatási Bizottságát. Annak Matematikai Albizottsága a kísérlet célkitűzéseit a sajátjaival [3], [4], [5] egyezőnek ítélte és vállalta a kísérlet patronálását.

2. A kísérlet fontos vonása, hogy — bizonyos alapismeretek nyújtásán túl — nagy súlyt helyez a másik alapvetőnek tekintett feladat megoldására, matematikai képességek kifejlesztésére. Képességfejlesztéshez rendszeres gyakorlásra van szükség. Ennek érdekében problémahelyzeteket hozunk létre, amelyekben a tanulók tájékozódni próbálnak. Eközben tapasztalatokat gyűjtenek és e tapasztalatokon keresztül juttatjuk el őket az elsajátítandó matematikai ismeretek minél nagyobb részének önálló felfedezéséig.

A tanulók így a tanítási órának tevékeny résztvevői. Szabadon dolgoznak a nekik megfelelő tempóban haladva előre. Megvitatják egymás közt és, ha nem sikerül dűlőre jutniuk, akkor a tanárral együtt a felvetődött nehézségeket. Bátran próbálkoznak, kísérleteznek, mert a tévedés sem jár hátrányos következményekkel. Éppen a tévedések eredetének felderítése vezeti el a tanulót annak felismeréséhez, hogy mit nem értett pontosan vagy értett eddig félre, és a tanárt esetleg a tanuló olyan nehézségeinek megismeréséhez, amelyekre nem is gondolt volna.

Ezt a szabad, alkotó légkört a tanulók számára a tanárnak kell megteremtenie. Ehhez mindenesetre szükséges, hogy az ő keze se legyen gúzsba kötve. Ismerve a célkitűzéseket, szabadon választja meg az éppen alkalmazandó módszereket a helyzet, a megoldandó feladat, az osztály és saját temperamentuma szerint.

A kísérlet célkitűzései érdekében azt tartjuk a leghatékonyabbnak, ha a tanulók az órák nagyobb részében kis csoportokban vagy egyénileg dolgoznak. Mégsem írjuk elő ezt sem kötelezően a kísérletben. Vannak ugyanis olyan munkatársaink, akikhez ez a módszer nem áll közel, de az egész osztály együttes foglalkoztatásának keretében is jól meg tudják valósítani a kísérlet célkitűzéseit.

3. A kísérletnek itt csak néhány jellegzetességét ragadtuk ki. Az alapul szolgáló irányelveket már 10 éve megfogalmazta egy bizottság, amelyik a minisztérium megbízásából tanulmányozta a matematikatanítás korszerűsítésének lehetőségeit Magyarországon [6]. De ezek voltak a célkitűzései már az általános iskolai komplex matematikatanítási kísérletnek is, amely majdnem 20 évvel ezelőtt indult, és amelyen alapul a jelenlegi (új) általános iskolai tanterv. Ez a dokumentum is részletesen ismerteti az alapjául szolgáló elgondolást és elemzi megvalósításának módjait az általános iskolában.

A középiskola kezdete egybeesik a tanulók életkori sajátosságainak lényeges megváltozásával. A matematikai tananyag is sokkal absztraktabb fogalmakhoz ér el, előtérbe lép a tananyag rendszerezése, összefüggő egésszé ötvözése. Mindezek az általános iskoláétól lényegesen különböző feladatok elé állítják a pedagógust, sajátos módszereket igényelnek, különösen akkor, ha nem akarunk beletörődni abba, hogy a tanulók többsége csak felszínes, könnyen múló matematikai ismereteket szerezzen, megrekedjen egy verbális tudás és néhány számítási eljárás gépies alkalmazásának szintjén.

A kísérlet célja alkalmas középiskolai módszerek kialakítása volt és végső célként felkészülés egy olyan tanterv kialakításához, amely tovább érleli az általános iskola gondolkodásfejlesztő, önállóságra nevelő munkáját. Bár szemünk előtt egy távlati tanterv előkészítése lebegett, azt is reméljük, hogy segítséget adhatunk az igényes pedagógusoknak ahhoz, hogy a jelenleg kezük alá kerülő és már az új tanterv szerint végzett tanulókat hasonló szellemben vezethessék a középiskolában is. Ezt a célt szolgálja a munkatankönyv is, amelyről alább több szó is esik majd.

A kísérlet első szakaszában a résztvevő tanulók még a régi tanterv szerint és a régi szellemben végezték az általános iskolát. Ezért hiába állítottunk be kombinatorikát, statisztikát, valószínűségszámítást kísérleti tervünkbe, az ezekhez készült anyagok kipróbálása elmaradt. A kísérletnek ez az első szakasza elsősorban módszertani jellegű volt.

4. A tanulók önállóságra nevelése a hagyományostól eltérő segédleteket követelt, hiszen az ismereteket kifejtő tankönyv kevés lehetőséget hagyna önálló felfedezésre.*

A tankönyv helyét a feladatlapok vették át, amelyeket később munkafüzetbe fogtunk össze. Ebben olyan feladatsorok vannak, amelyek a továbbhaladást szolgálják. Van hely a munkafüzetben a tapasztalatok leszűrésére, először a tanulók egyéni megfogalmazásában, és külön megjelölt hely a közös megbeszélés, megkritizálás után helyesnek elfogadott megfogalmazás részére.

A munkafüzetet feladatgyűjtemény egészíti ki, továbbá olvasmányok az ismeretek elmélyítésére, kitekintés nyújtására, hogy egy-egy témakörhöz milyen további problémák kapcsolódnak, amelyekkel már nem foglalkozunk az iskolában. Ezeket az olvasmányokat sokféleképpen lehet felhasználni: együtt olvasni és megbeszélni; vagy úgy, hogy egy vállalkozó tanuló elolvassa és beszámol róla, és ennek alapján megbeszélni; vagy otthon elolvastatni és utána megbeszélni stb.

Az olvasmányok nemcsak tájékoztatásra, ismeretbővítésre szolgálnak, hanem olvasni tanításra is. Még az irodalmi művek olvasására is tanítani kell: arra,

* A valamikor oly híres kérdve kifejtő módszer, amelyben a tanárok kérdésére adott diákválaszokból állt össze az új ismeret, csupán annyi változást hozott — miként azt Kalmár László fogalmazta meg találóan —, hogy attól kezdve csak az volt megmondva, honnan kezdődik az új lecke, az nem, hogy meddig tart. Hiszen hamar rájöttek a tanulók — nem is kellett hozzá nagy ördöngősség —, hogy akkor tudnak jól felelni a tanár kérdéseire, ha megtanulják a könyvből az éppen következő részt.

hogy ne csak a történetre figyeljenek a gyerekek, hanem a mögötte rejlő mélyebb mondanivalóra is, amelynek kifejtésére a történet sokszor csak alkalom, ürügy.

Még sokkal nehezebb megtanulni matematikai szöveget olvasni: eljutni onnan, hogy az ember csak az egymás utáni lépések helyességét ellenőrzi, odáig, hogy felismerje a lényeges mozzanatokat, azok horderejét, elgondolkozzék egyéb alkalmazási lehetőségeken, általánosításokon stb.

Korunkban az olvasni tanítás a matematikatanítás lényeges részévé válik, hiszen számolnunk kell azzal, hogy tanítványaink egy részének, és nemcsak a matematikával szoros kapcsolatban álló területeken elhelyezkedőknek, szüksége lesz matematikai ismeretei továbbfejlesztésére. Fontos tehát őket erre képessé tenni, felkészíteni. Ennek a módszerei még nincsenek kikristályosodva. Ezek kialakítása is feladata a kísérletnek. Néhány ide vonatkozó tapasztalatról is jelent meg beszámoló az „Útközben" c. időszakos kiadványban.

A tankönyvet sem nélkülözzük teljesen, egy „kislexikon" foglalja össze röviden az egy-egy osztályban tanult fogalmakat, összefüggéseket, eljárásokat. Ez azonban már csak emlékeztető, részletesebb magyarázatok nélkül. Gyorsan utána lehet benne nézni a tanultaknak, ha valaki nem emlékszik rájuk pontosan, de senkit sem csábít arra, hogy innen tanuljon meg valamit. A segédletek használatához a tanárok tankönyvi útmutatót kapnak.

Az így felépített segédletekről az olvasó maga is képet alkothat magának, mert az 1979-80. tanévben a gimnáziumi matematika-tankönyv mellett megjelent a már említett Matematika munkatankönyv I. című könyv is a hozzá tartozó tankönyvi útmutatóval együtt [7], [8]. Ez a kísérleti anyagok alapján készült, azok összeállítóinak tollából,* és a sorozat további kötetei is készülnek.

5. A kísérlet említett első fázisa lezárult, az 1979-80. tanévben már nem indultak első osztályok. A kísérlet szellemében történő tanítás lehetőségét biztosítja a munkatankönyv. A kísérleti osztályokban végzett tanulók érettségin, felvételi vizsgákon jól megállták a helyüket, semmiben sem maradtak le a többi osztályban végzett tanulókhoz képest. Pedig a vizsgák nem adnak tájékoztatást azokban a vonatkozásokban, amelyekben a kísérlet elsősorban kíván javítani a korábbi tanításhoz képest, és úgy ítéljük, hogy nem eredménytelenül.

Első helyen említjük azt, hogy a tanulók túlnyomó része, közepesek és gyengék is, *megszeretik a matematikát.* Amikor azt látjuk, hogy a tanulók nem várják, alig is hallják meg a csengetést, hogy a szünetben a táblára írva, rajzolva vitatkoznak, kiküldeni is alig lehet őket, akkor ebben nehéz kételkedni. Ez igen fontos a kísérlet szempontjából is, de fontos a matematikára és jövőnkre nézve is.

Hogy a tanulók önként komoly erőfeszítéseket tegyenek eredmények eléréséért, azt *csak a tárgy érdekességétől várhatjuk.* Más motiváló eszközök hozhatnak átmeneti eredményeket, hasznosak lehetnek éppen abban, hogy segítenek a tárgy megszerettetésében, különösen akkor, ha az általános iskolából nem éppen ilyen érzülettel jöttek a tanulók. Tartósan azonban csak akkor fognak erőfeszítéseket tenni a matematika irányában, ha elég érdekes számukra, amit csinálnak.

Fontos ez az érdeklődés, és hangsúlyozom, a széles körű érdeklődés a matematika szempontjából is. *Társadalmunk vezetőinek csak kis része* kerül ki azok közül, akik mélyebb matematikai tanulmányokat folytattak. Ha pedig egy vezetőnek rossz emlékei vannak a mate-

* A munkatankönyv használatát az 1979-80. tanévben még bizonyos feltételekhez kötötte a minisztérium, az 1980/81. tanévtől kezdve azonban szabadon lehet választani a két tankönyv között

matikáról — esetleg éppen arra büszke, hogy kukkot sem értett belőle, mégis sokra vitte —, akkor a legsúlyosabb érvek is hatástalanok maradnak egy, a matematika fejlesztésére vagy felhasználására irányuló intézkedés megtétele érdekében. Ha viszont érdekesnek, szépnek, hasznosnak érezte matematikai tanulmányait, akkor mindenkor fogékony lesz az értelmes érvekre a matematika érdekében. Azt pedig, hogy *milyen hatékony* lehet mai életünkben *a matematika felhasználása*, ha hozzáértők a kellő helyen és módon alkalmazzák, és kevésbé hozzáértők nem gáncsolják őket ebben lépten-nyomon, azt e lap olvasóinak *fölösleges magyaráznom.*

Hasznosnak látjuk a kísérleteket abból a szempontból is, hogy az ezen felnőtt tanulók *bátrabban nyúlnak hozzá számukra újszerű feladatokhoz* is, és sokféle ismeretet próbálnak mozgósítani megoldásukra. Ilyen irányú számszerű felméréseket is tervezünk, de egyelőre a részben társadalmi munkában közreműködő munkatársak minden energiáját leköti az anyagok készítése, javítása, nem is beszélve az ezekhez járuló tisztán technikai jellegű feladatokról, amelyeket sokszor szintén magunknak kell ellátnunk.

6. Új szakaszába lépett a kísérlet az 1977/78. tanévben. Ekkor sikerült egy középiskolába összegyűjteni fél osztályra való olyan tanulót, akik komplex matematikatanítási kísérlet szerint tanultak az általános iskolában. Ezek számára új tantervet állítottunk össze, és új kísérleti anyagok készültek. Ezeket a tapasztalatok alapján módosítjuk és folytatjuk a kísérletet a következő osztályokban, próbálva most már közelebb kerülni eredeti elgondolásainkhoz. Egyelőre nehezíti ezt az, hogy a kísérleti osztályok tanulóinak általában csak mintegy fele tanult új szellemben az általános iskolában.

A tananyag vonatkozásában igyekszünk egységes képet nyújtani a matematikáról, lehetőségig olyannak mutatva be, amilyennek a mai szintről visszanézve látja saját magát a matematika.

Azt is szem előtt tartjuk, hogy ez a matematika több ezer éves fejlődés eredménye. Ezen belül az egyes fogalmak is hosszú idő alatt, fokozatosan alakultak ki. Ezért a tanulóknál is hosszú érési időt kell biztosítanunk, ha világos, biztos, tartós fogalmakat akarunk kialakítani.

Szem előtt tartjuk más tárgyak igényeit is, amennyire csak lehet, és fontos feladatnak tekintjük a matematika alkalmazásainak bemutatását, valódi alkalmazásokra és nem álgyakorlati problémákra gondolva.

Folytathatnánk a szempontok felsorolását, de már ennyi is nehezen fér meg egy fedél alatt.

7. Az új szempontok azonban a tárgyalásmód változását is követelik. Ahelyett, hogy a matematikát különálló fejezetekre bontva tárgyalnánk, rá kívánunk világítani a matematika különböző ágainak kapcsolatára, összefonódására. Hogy csak egy példán világítsam meg, nem válik külön pl. a lineáris függvény, majd az elsőfokú egyenletrendszerek és egyenlőtlenségek grafikus megoldása, és jóval később az egyenes koordinátageometriája, hanem úgy jelentkeznek ezek, mint *egy* probléma különböző szempontokból vizsgálva.

Már az általános iskolában szerepelt igen sokféle halmaz leképezése (ugyanabba vagy egy másik) halmazba, így igen általános függvényfogalmat alakítva ki.* Hasonlóan van már képük a tanulóknak az egyenletekről és a megoldandó egyenlőtlenségekről is mint „nyitott mondatokról" (ismeretlent tartalmazó állításokról), amelyekről azt kérdezzük, hogy mi egy adott halmaz összes olyan

* Természetesen itt konkrét példákra kell gondolni, amelyekkel való tevékenykedés során szerzett tapasztalatokból alakul ki egy függvénykép a tanulókban. Ennek szavakba foglalása későbbre, általában a középiskolára marad.

elemének halmaza, melyeket a nyitott mondatba illesztve igaz állítást kapunk; más szóval mi a kérdéses nyitott mondat igazsághalmaza. Ezeket most további példákkal egészítjük ki, amelyek közt szerepel abszolút értékes egyenlet és egyenlőtlenség, szerepel másodfokú, szerepel exponenciális, amelyeket az értelmezés alapján meg tudnak oldani a tanulók, de a hangsúly az elsőfokúakon van.

A problémákat a műveletek oldaláról nézve (lebontogatás, mérleg-elv) az algebrai megoldások és algebrai azonosságok felfedezése felé haladunk; a függvények oldaláról nézve az elsőfokú függvény vetődik fel, és a grafikus megoldáshoz érkezünk. Eközben belép a geometriai szempont és az egyenes a koordináta-rendszerben. A függvények ábrázolása során a geometriai transzformációk — amelyek a maguk részéről megint csak függvények — és így tovább.

Hangsúlyozom, nem arról van szó, hogy ezeket elmondjuk, mint gyerekkorom gyerekújságjának versikéi: „Az oroszlán is csak macska, csak egy kicsit nagyobbacska." A gyerekek feladatokon dolgoznak, azokat boncolgatják egyik vagy másik szempontból és közben tapasztalatokat szereznek. Ezekben a tapasztalatokban a közösnek a felfedezése, megfogalmazása, a tapasztalatok rendszerezése megint csak az ő tevékenységük, amikor erre megérik a helyzet.

8. Ilyen módon a különböző tárgykörök együtt haladnak, fejlődnek, de közben hol az egyikre, hol a másikra helyezzük a fő hangsúlyt, irányítjuk a tanulók figyelmét. Ezzel elérhetjük azt is, hogy az egyes fogalmak fokozatosan alakuljanak ki. Ismét egy példával világítom meg.

A vektorok és szögek tárgyalása során rávezetjük a tanulókat arra, hogy a szögeket hasznos lehet nem az ív, például az egységnyi sugarú kör ívének hosszával vagy egy ezzel arányos mérőszámmal, hanem egyenesszakasszal mérni. Ez megkönnyíti pl. a szögek bevonását számításokba. Ilyen egyenesszakasz lehet az adott irányú egységnyi sugár (előjeles) vetülete az egyik vagy másik tengelyen — az egységvektor koordinátái. Ezek függvényei a szögnek. Ábrázolhatjuk őket, néhány egyszerű feladatot is megoldatunk velük kapcsolatban, ill. segítségükkel. Így elérhetjük már az első osztályban, hogy a tanulók értsék, mik a szögfüggvények, egyszerű esetekben tudják használni őket a fizikában is.

Azt persze nem mondhatjuk, hogy megtanulták a szögfüggvényeket. Ez a következő év feladata lesz, de ez is könnyebb akkor, ha nem egyhuzamban kell megérteni is az új fogalmakat, meg kiismerni a velük való bánás minden finomságát.

Ilyen módon vissza-visszatérve az egyes fogalmakra és mindig tovább fejlesztve, minél több más kérdéssel kapcsolatba hozva azokat, egyszerre szolgáljuk különböző célkitűzéseinket: egységes, összefüggő képet alakítunk ki a matematikáról, jól mozgósítható ismereteket adunk a tanulóknak, hosszú érési időt biztosítunk a fogalmaknak és közben a felhasználó tárgyaknak is korábban tudjuk nyújtani az egyes ismereteket, mint a hagyományos tárgyalásmód mellett.

Párhuzamosan gombolyítva sok fonalat reméljük, hogy még ezek számát is növelhetjük valamivel és beiktathatunk pl. kombinatorikai ismereteket, statisztikát, valószínűségszámítást, továbbá, ha a külső feltételek is biztosíthatók hozzá, talán a számológépekről is valamit.

9. Az előttünk álló további feladatok közül komoly gondot okoz, elsősorban szervezési szempontból, a fakultatív oktatás, amelynek során a tanulók a választott iránytól függően különböző óraszámban és ennek megfelelően különböző tanároktól fognak matematikát tanulni. Emellett sürgős feladatunk a kísérlet tervének kidolgozása is a különböző választható szintekre.

Legfontosabb, soron következő fela-

datunknak tekintjük a szakközépiskolai kísérletek kiszélesítését. Említettük már, hogy a gimnáziumok mellett néhány szakközépiskolai osztályban is folyik kísérlet. Ezek is a gimnáziumok számára készült segédleteket kapják kézhez, és a tanárnak nem éppen könnyű feladata, hogy az iskola szükségleteihez és a rendelkezésre álló időhöz mérten átcsoportosítsa, megrostálja, esetleg a tanulóanyag szintjének megfelelően ki is egészítse azt.

Ahhoz, hogy a szakközépiskolai kísérletek ne csak szórványosak legyenek, ezt a munkát előre el kell végeznünk és ehhez hozzá is kezdtünk. A tantervnél kellett kezdenünk. Itt javítani akartunk azon a helyzeten, hogy a különböző irányú szakközépiskolák tanterve általában csak attól függ, hogy mekkora heti óraszámban tanulnak matematikát. Igyekeztünk ehelyett, legalábbis néhány típusú szakközépiskola esetében, felmérni a szaktárgyak igényeit és ennek alapján készíteni tantervet. Ezekhez készítjük most el a segédleteket, hogy azután rendszeresebb kísérletekbe kezdhessünk.

10. Tudjuk, hogy a matematikához továbbra sem vezet királyi út, jobb eredményeket csak tanulók és pedagógusok intenzívebb munkájától remélhetünk. A tanulóknál a munka érdekessé, széppé tételével igyekszünk elérni, hogy érdemesnek tartsák megfeszíteni erejüket. Reméljük, hogy tanáraink is szívesebben vállalják az intenzívebb munkát, ha látják, hogy a tanulók igyekeznek, érdeklődnek, és látják, hogy ennek nyomán miként nyiladozik az agyuk, és nemcsak könnyen lepergő, felszínes ismeretekre jut el a többség nagy kínlódások közt.

IRODALOM

[1] *Gádor Endréné:* Egy középiskolai matematikatanítási kísérletről. A Matematika Tanítása XXI. (1974), 113—118. oldal.

[2] *M. Bartal Andrea—Pálfalvi Józsefné:* Még egyszer egy középiskolai matematikatanítási kísérletről. A Matematika Tanítása XXII. (1975), 45—54. oldal.

[3] *A Magyar Tudományos Akadémia* állásfoglalásai és ajánlásai a távlati műveltség tartalmára és az iskolai nevelőtevékenység fejlesztésére (1973—1976). Budapest, 1976. 406 oldal. Matematikai nevelés: 90—108. oldal.

[4] *Gádor Endréné—Surányi János:* Célok és lehetőségek az iskolai matematikai nevelésben. Magyar Tudomány 1974., 570—576. oldal.

[5] *Surányi János—Szendrei János:* Matematikai nevelés. Magyar Tudomány 1975., 137—142. oldal.

[6] *Surányi János:* A matematikatanítás korszerűsítésének néhány alapelve, a Néhány hazai és külföldi kísérlet c. tanulmánygyűjteményben. Új utak a matematika tanításában 1. Tankönyvkiadó. Budapest, 1972., 7—53. oldal.

[7] *M. Dr. Bartal Andrea—Pálfalvi Józsefné:* Matematika munkatankönyv I. Tankönyvkiadó. Budapest, 1979. 272 oldal.

[8] *M. Dr. Bartal Andrea—Pálfalvi Józsefné:* Tankönyvi útmutató az I. osztályos Matematika munkatankönyvhöz. Tankönyvkiadó. Budapest, 1979. 92 oldal.

KOVÁCS ZOLTÁN
főiskolai adjunktus
Budapest

Zsebszámolók programjainak elágaztatása

Lapunk 1979/2. számában a *folyamatábrák tanításáról* olvashattunk egy prímkereső program kíséretében, amely a magyar PTK-1072-es zsebszámolóra íródott. Örömmel vehetünk minden ilyen cikket, hiszen ajtónkon csak néhány éve kopogtató téma metodikáját igyekszenek a szerzők kialakítani. S ez nem is olyan egyszerű.

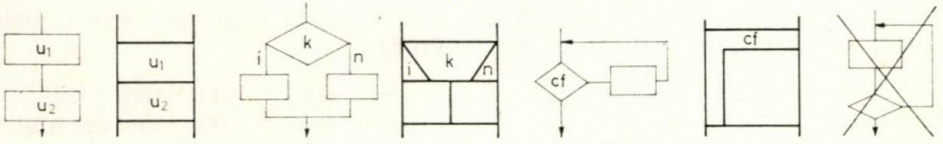
Vegyük tárgyalási alapul csupán az említett írás két *számelméleti* diagramját! A prímszámok világát valóban

pompás dolog kalkulátorokkal kutatni. Folyamatábra készítése sem látszik nehéznek. Egy olyan program elvi megadása, amely például eldönti egy számról, hogy az törzsszám-e, csak házi feladat súlyosságú. Mindjárt jelentkeznek a gondok, ha valamelyik géptípusra akarjuk azt adaptálni.

Első módszertani kérdéskör. Melyik a jobb: egy általános folyamatábra steril világossága, vagy egy konkrét masinára szerkesztett, annak esetlegességeit, fogyatékosságát tükröző diagram? Egymás mellé tenni őket, vagy összeolvasztani? A szerző az utóbbit választotta, amihez azonban néhány megjegyzést kell fűzni.

Az alkalmazott *elv:* Egy adott a ($\geqq 5$) páratlan számot $m=3, 5, 7, 9, \ldots$ stb.-vel osztunk, ha még $m \leqq \sqrt{a}$ (kisebb egyenlő!). Ha valamelyik osztás hányadosának a törtrésze (ami mindig létezik!) nulla, akkor az a összetett, különben prím. Itt a kiválasztott zsebszámológép képességét *kellett* figyelembe venni, hiszen elvileg csak a prím osztókkal kellene foglalkoznunk. A közölt diagram is a PTK-1072 tudásához igazodott, tehát nem általános érvényű. A $\{q\}<\varepsilon$? feltétel például a géphez való *túlságos* alkalmazkodásról árulkodik. (Erről majd később. Írásom címe épp ebben a kérdésben ígér valamit.)

Egy pedagógiai céllal összeállított folyamatábránál nem szokás számítástechnikai szigorral mérni. A rajz csak eszköz, a gondolat megjelenítője. Számítógépes barátaimtól tudom azonban, hogy ők igenis nagyon szigorú szerkesztési szabályokhoz ragaszkodnak. Így az a program is áttekinthető lesz, amelyben sok elágazás és ciklus található (gyakran egymásba skatulyázottan). Az egyetemi képzésben *struktogramnak* nevezik ezt a speciális blokkdiagram nyelvet. Röviden a szerkezetéről. (Vékony vonallal jelölve a hagyományos megjelenítés látható. A betűk jelentése: utasítás, kérdés, ciklusfeltétel.) Következő kérdéscsoport. Mennyire vegye figyelembe a középfokú



oktatás ezt a módszert? Vajon ugyanolyan megközelítés szükséges a kis kalkulátorokhoz, mint a nagy számítógépekhez? Nincs-e jelentékeny lemaradása a pedagógusoknak — a legfiatalabbak kivételével — a számítástudományban? Szerepel-e a felsőoktatásban a zsebszámoló?

Térjünk vissza a prímszám folyamatábrájához! Nem hiba, de épp olyan vissza-elágazásokat látunk benne, ami a fentiek szerint tilos, kiküszöbölendő. (Megpróbálhatjuk például az osztó nagyságára fogalmazott feltételt a ciklus elejére tenni.) Hiba viszont, hogy a program szerint gyakran a vizsgált szám *gyökénél nagyobb* számmal osztunk. Tessék kipróbálni például $a=1777$-tel! Miután leáll a gép, MR 1-gyel előjön a 45. Ezzel már nem, de az előzővel, a 43-mal még osztott, ami nagyobb, mint $\sqrt{1777}$. (Mettől meddig oszt feleslegesen a gép 43-mal?)

Helytelen ugyanis, hogy az $m \leqq \sqrt{a}$ feltétel helyett álló $m-q<0$? kérdésben (ahol $q=a/m$) két különböző állapot rögzül: az m már az új osztó, a q még az előző (2-vel kisebb) osztóval meghatározott. Az eredetileg fogalmazott feltétel nem maradhatott, hiszen a PTK-1072-es csak aszerint tudja a programot elágaztatni, hogy a pillanatnyi (x) érték pozitív-e vagy negatív. Más típusú gépen, például a Hewlett—Packard 25-ön az y regiszterbe helyeznénk az m-et, az x pillanatnyi értékének behívnánk a q-t, mert ezen a gépen lehetséges a programban elágazni a két regiszter tartalmának összehasonlítása alapján is.

Hasonlítsuk össze néhány programozható kalkulátor képességét aszerint, hogy *milyen vizsgálatok végezhetők* bennük feltételes elágazással kapcsolatban.

PTK—1023	Semmilyen.
PTK—1072	$x \geqq 0$?
HP—25	$x=0$, $x \neq 0$, $x \geqq 0$, $x<0$, $x=y$, $x \neq y$, $x \geqq y$, $x<y$?
Texas—Instruments TI—51—III.	Semmilyen.
PTK—1096	$x=t$, $x \geqq t$, $x \neq t$, $x<t$? és másfélék.

Az 1072-es egyetlen „rákérdezési" lehetőségét nem kell tragédiának tartani. Tulajdonosának ötletességén múlik, hogyan tud egy feltételt úgy *átalakítani*, hogy elég legyen egy kifejezés nem negatív voltát megállapítani. A fenti esetben célszerű lett volna a $\sqrt{a}$-t egy regiszterben elraktározni, és a $\sqrt{a}-m \geqq 0$? kérdést feltenni minden ciklusban.

Számelméleti feladatokban lépten-nyomon *oszthatóságot* kell megállapítani. Ha nincs maradék... — szoktuk mondani. Gondoljunk azonban a mi PTK — 1072-esünkre! Hogyan állapítunk meg vele oszthatóságot program futása közben, ha éppen *az* az elágazás feltétele? Osztásnál a számológépek nem jeleznek ki maradékot, csak pontos hányadost adnak. Az „egészrész", „törtrész" (Int., Frac.) billentyűkkel kell operálnunk. Ha fennáll az oszthatóság, akkor a törtrész nulla. És fordítva.

Igen ám, de a *nulla törtrészt* ugyanúgy *pozitívnak* „érzi" a gép, mint a „valódi" törtrészeket.

Például {a:3}=x=0,66 vagy 0,33, vagy 0,00 mind pozitívok.

Más gépeken $x=0$? kérdéssel le tudjuk választani a többitől azt az esetet, amelyben fennáll az oszthatóság. A PTK—1072-vel ravaszkodni kell. Az említett folyamatábrán és programleírásban a szerző a törtrészt egy elég kicsinek választott számmal hasonlította össze: $\{q\}<\varepsilon$?, illetve Frac $-$Mr 2=($\geqq 0$?). Bevált ez is, csak hát matematikailag csúnya ez a megoldás. Van-e jobb? Próba:

Legyenek a törtrészek	*Frac*	0,66	0,33	0,00	Mind pozitív!
Előjelcsere	*Frac* $^{+}/_{-}$	−0,66	−0,33	−0,00	Mind negatív!
Még nem sikerült a nulla törtrészt más előjelűvé tenni.					
Ötlet:	*Frac* $^{+}/_{-}$**−0=**	−0,66	−0,33	0,00	Sikerült!!
(újabb előjelcsere, ha kell		0,66	0,33	−0,00	Így is elkülönült!)

Az ajánlott programrészlet tehát

(a:m=) F Frac $^{+}/_{-}$ −0=Skip Goto NN (m+2=stb.)

Ha a hányados törtrésze nulla, akkor a végeredményben újra „pozitív nulla" lesz a Skip ugróutasítás előtt, ezért az NN számú lépésre ágazik el a program. Egyéb esetekben (ha például 0,66 vagy 0,33 a törtrész) a Skip előtt negatív lesz a szám, ezért a Goto NN átugrásával folytatódik a számítás. (Megjegyzés: **−0=** helyett sokszor elegendő **=**-t billentyűzni, de ekkor magyarázkodnunk kell, hogy adott esetben mi történik.)

Röviden összefoglalva: Az egyetlen $x \geqq 0$? feltételvizsgáló lehetőség is elég volt, mert sikerült a nullát a többi értékektől előjelben megkülönböztetni. A gép a zérust is negatívnak tekinti, ha negatív előjel áll előtte. Eltérő tehát gépünkön a nulla fogalma a köznapitól.

A *pontosság* figyelemmel kísérése szintén fontos a számítógépeknél. Nézzük például a legnagyobb közös osztó keresésére szánt folyamatábrát. (Célszerű lett volna m helyett r-rel jelölni a maradékot, az $a=b \cdot q_1+r_1$ stb. sorokra gondolva.) Az a:b osztáskor egy „pontos" tizedestört hányados áll elő: q. Ha a q törtrészét (ami néha nulla) b-vel meg-

szorozzuk, akkor *elméletileg* azt az r maradékot kapjuk meg, amely maradékos osztásnál keletkezett volna.

Nézzük csak, hogyan szól közbe a pontosság?

A 98 765 432:3 osztás hányadosa a gép „belsejében" 32 921 810,66. (A kijelzőn ennek nyolc jegy pontosságú kerekített részét kaphatjuk meg legfeljebb.)

A törtrész $0{,}66 \approx 2/3$, és így $0{,}66 \cdot 3 = 1{,}98$. *Nem kaptuk vissza* a maradékot, a várt 2 egészet. (Mi a maradék például a 74 185 296:13 osztás esetében a valóságban és a törtrésszel számítva?)

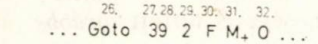
Úgy kellett volna az $a:b$ osztás maradékát meghatározni, hogy a hányados *egészrészét* szorozzuk meg az osztóval, és ezt a szorzatot kivonjuk az osztandóból. A blokkdiagram nagyon eklektikus tehát: az $r := b \cdot \{q\}$ csak elméletileg igaz, semmilyen géppel nem szabad így számolni; a $\{q\} < \varepsilon$ feltétel pedig — mint tárgyaltuk — naiv alkalmazkodás egy konkrét géptípushoz.

— * —

Néhány program közreadásával illik hogy záruljon ez a hozzászólás, de közben újabb kérdések merülnek fel. *Milyen formában jegyezzük le* a programokat? Egymás alá a lépéseket (mint az idézett cikkben) vagy vízszintes sorokba rendezve? Mi az, hogy lépés? Hogyan olvassuk ki az angol rövidítéseket? Stb. stb.

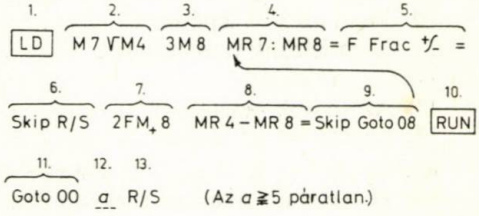
Mivel kidolgozatlan területről van szó, célszerű többféle utat bejárni, hogy a legjobbak kikristályosodjanak. *Néhány elvet* azonban jó ha megfogalmazunk és betartunk: legyen a program leírása tagolt és tagolható; egyértelműen olvasható; minél több jele írógéppel írható.

A PTK-1072-es zsebszámolónál minden gombnyomás *egy lépés*:



Jelentése: menj a 39-es lépéshez; adj 2-t a nullás memória tartalmához. A hét lépés csak két *utasítás*. (A legtöbb gépen ez két lépés is.) A magam gyakorlatában több összetartozó lépésnek, utasításnak *mozzanat* a neve. Csak azokat számozom írásos magyarázatok céljára.

Íme egy *prímvizsgálatot* végző program, amelyben a rövidség volt a fő szempont. (Vegyük észre az előjelcsere sajátos jelölését!)

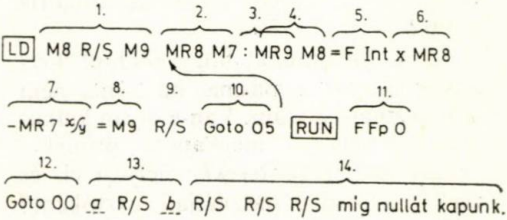


1. Programozó (töltő) üzemmód. 2. A vizsgálandó számot a 7-es, gyökét a 4-es regiszterbe tesszük. 3. A legkisebb osztó, (m=) 3 a 8-asba kerül. 4. $a:m$. 5. A nulla kivételével a törtrészekből negatív számot csinálunk. (Részletesebb magyarázatát lásd fentebb!) 6. Átugrott rész, ha a pillanatnyi érték negatív. Egyébként Stop. 7. 2-vel növeljük az osztót. 8. $\sqrt{a} - m$. 9. Ha ez pozitív, menj a 08-as lépéshez! 10. Futtatásra állni! 11. Menj az elejére! 12. Billentyűzzük be a vizsgált számot! 13. Fusson a program! (Újabb vizsgálatkor csak a 11., 12., 13. ismétlendő.)

Ha a kijelzés negatív szám, akkor az a prím.

Ha a kijelzés 0, akkor a vizsgált szám összetett. (Legkisebb valódi osztója MR 8 hívással adódik.)

A következő program az *euklidészi algoritmus* csökkenő maradékait számítja ki.



1. Az a a 8-asba, a b a 9-esbe megy.
2. A 8-as tartalmát másold a 7-esbe!
3. A 8-as tartalmát oszd el a 9-esével!
4. A 9-es tartalmát másold át a 8-asba!
5. Az osztás eredményének vedd az egészrészét!
6. Szorozd meg azt az osztóval!
7. Az osztandóból (!) vedd el a szorzatot!
8. Az eredményt maradékként másold a 9-esbe!
9. Állj meg, hogy a maradékot leírhassuk!
10. Menj az 5-ös lépéshez!
11. Nem kérünk tizedesjegyet.
12. Állj az elejére!
13. Az adatok bevitele.
14. Egyenként adódnak a maradékok.

R_7	R_8	R_9
	a	b
a	b	r_1
b	r_1	r_2
r_1	r_2	r_3
...	...	...
...	...	r_n
...	...	0

Mennyi 963 és 657 vagy 213 063 és 35 960 lnko-ja?

Ha közvetlenül akarjuk megkapni a legnagyobb közös osztót és mellékesen a lkkt-t és a szorzatot is, akkor ilyen a program:

```
□ M8 M5 x R/S M9 M6=M7 MR5 M4:MR6 M5=
F Int x MR5-MR4=Skip Goto 42 ↑ M6 Goto 13
MR 6 R/S:MR 7 x/y =R/S MR 7 □ F Fp 0
Goto 00 a R/S b R/S ez a lnko R/S a lkkt
R/S a szorzat.
```

Láthatóan felhasználtuk az $a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b]$ összefüggést.

Beszéljünk a diákokkal programjaink *lehetséges változatairól!* Más, nagyobb tudású kalkulátorra hogyan tökéletesítenénk azokat? Nagy számítógépeken, ahol „korlátlan" adattárolásra van mód, milyen eljárás jöhet szóba?

Miként írjuk át például utolsó programunk végét, hogy szerencsés esetben akkor is megkapjuk a legkisebb közös többszöröst, ha a két szám szorzata pontosan már *nem fér a gépbe*? (Egy „szürke kis" azonosság segít.)

Alakítsuk át prímvizsgáló programunkat úgy, hogy sorba vegye a páratlan számokat, és ha az összetett, akkor legkisebb valódi osztóját; ha prím, akkor önmagát jelezze ki. Nem tudnánk elérni, hogy az *5-re végződő* számokat átugorja a gép?

Nagy fájdalmunk, hogy például 9-cel akkor is oszt a masina, ha 3-mal nem volt osztható a szám. Van-e olyan kalkulátor, amely a megkapott prímeket *egymásutáni regiszterekbe* helyezi el, és csak azokat használja osztóként? (A PTK-1096-ossal megoldható!)

Komputerrel hogyan végeznénk a prímszitálást, hogy az minél hasonlóbb legyen Eratosztenész módszeréhez?

Összefoglalásul néhány mondat. Tanítani kell számítástechnikát a középiskolában! (Az általános iskolai oktatásban is szerepeljen legalább bújtatva.) A zsebszámolók megjelenésének konzekvenciáit — az oktatás különböző szintjein — minél hamarabb le kell vonni. Néhány lelkes tanár és tehetséges tanítványainak eredményei képezzék egy kialakítandó metodika alapját. (Tapasztalat, hogy a fiatalok feszélyezetlenebbül, gyorsabban, eredményesebben bánnak a kalkulátorokkal.)

Önképzés, tapasztalatcsere mellett mindnyájunknak szüksége van elméleti szakemberek segítségével tartott *továbbképző tanfolyamokra.*

Egyre több, egyre olcsóbb zsebszámoló várja, hogy hozzáértők kezében a matematikaoktatásnak újabb lendületet adjon.

Hírek: A TANÉRT-ben 1979. október 10-én kerekasztal-beszélgetés volt, amelyben körvonalazódott egy olcsó, általános bevezetésre ajánlott zsebszámoló. (Hasonlóan sokat tudó, mint a PTK-1072. Szintén a Híradástechnika gyártaná.) A PTK-1072 ára a korábbi 6500 forinttal szemben 1980 januárjától 5240 Ft.

A minden igényt kielégítő PTK-1096-os és printere a korábbi 35 000+24 000 forint helyett 24 800+24 300 Ft. (Iskolák még 11%-kal olcsóbban szerezhetik be a gépeket a cégtől.)

DR. HOSSZÚ MIKLÓS
tanszékvezető egyetemi tanár
Gödöllő

A bűvös kocka

1. A feladat ismertetése

A bűvös kocka 3×3×3 darab kis kockából áll, amelyek egy ötletes belső mechanizmus segítségével laponként elforgathatók egy-egy lapközéppont körül. A kis kockák külső lapjára műanyag lapok vannak ragasztva. Alaphelyzetben a bűvös kocka egy-egy lapja azonos színű kis kockákat tartalmaz, a hat lap összesen tehát hat különböző színt. A bűvös kocka középső kis kockája nem látható.

A lapok elforgatása után a színek összekeverednek a bűvös kocka lapjain. A feladat éppen az, hogy véletlen keverés után vissza kell állítani az alaphelyzetet. Ez a visszaállítás már néhány lap elforgatása után sem könnyű. A nehézséget az okozza, hogy két különböző lap elforgatásának sorrendje nem mindig cserélhető fel, mert a sorrend felcserélésével általában más eredményt kapunk, a visszaállításkor tehát erre is ügyelni kell.

Az alábbiakban bemutatunk egy olyan eljárást, amellyel tetszőleges „összekevert" bűvös kockán helyre lehet állítani az alaphelyzetet.

2. Jelölések

A tájékozódás érdekében célszerű megállapodni néhány jelölésben. Minthogy egy-egy lap elforgatásakor a lap középső kis kockája helyén marad (invariáns), ezért az egyes lapok középső kis kockája mutatja, hogy arra a lapra milyen színű kis kockákat kell gyűjteni a rendezés során. A színük szerint megkülönböztetett lapközepeket rögzített állásban célszerű magunk elé helyezni, és azon lehetőleg a későbbiekben se változtassunk!

A kis kockákról színük alapján lehet eldönteni, hogy melyik helyre valók eredeti alapállásban. A továbbiakban a kis kockák megkülönböztetése érdekében betűket használunk. Egy rögzített állásban magunk elé helyezett lapközepek esetén:

(1) *e, h, a, f, j, b* betűkkel jelöljük az elülső, hátsó, alsó, felső, jobb, illetve bal oldalon helyet foglaló lapok közepén álló kis kockákat (röviden *lapközepeket*);

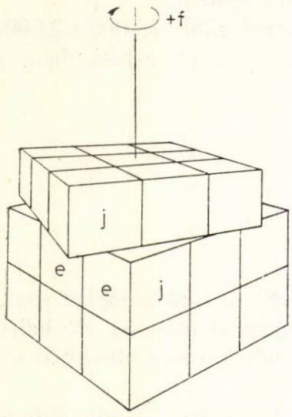
(2) *ea, jf,* ... betűpárokkal jelöljük a visszaállítani kívánt eredeti alapállásban az elülső — alsó, jobb-felső, ... élek közepére való kis kockákat (röviden *élközepeket*);

(3) *jah, bfe,* ... betűhármasokkal jelöljük a jobb-alsó-hátsó, bal-felső-elülső, ... csúcsokra való kis kockákat *(csúcsokat)*.

Hangsúlyozzuk, hogy pl. *jf* azt a kis kockát jelenti, amely a rendezett alapállásban a jobb-felső él közepén foglal helyet, függetlenül attól, hogy a rendezetlen kockán pillanatnyilag melyik él közepén áll. Magát a jobb-felső él közepét röviden a *jf helyének* nevezzük, függetlenül attól, hogy ott pillanatnyilag éppen mi áll.

Az egyes lapok elforgatását a lapközép megjelölésével írhatjuk le. Jelentse pl. $+f$ a felső lap elforgatását 90°-kal az óramutató járása (a jobbmenetű

csavar becsavarása) irányában, $-f$ pedig ennek ellentettjét (a kifelé csavarást) (l. az ábrát!).



Két különböző lap egymás utáni elforgatását az összeadás műveletével jelölhetjük: jelentse pl. $f+j$ először az f, majd a j lapközéppont körül, mindkét esetben az óramutató járása irányában végzett 90°-os elforgatás összetételét; $f+f=2f$ viszont ugyanannak az (előbb már részletesen jellemzett) elforgatásnak kétszeri alkalmazását!

Érdemes mechanikusan is gyakorolni néhány fontosabb összetett műveletet, amelyek lényeges szerepet játszanak a későbbiekben:

1. $t:=e-j-e$ (ekvivalencia vagy hasonlósági transzformáció). Ez csupán az e és j lapközép szomszédaiban okoz változást, a többi kis kockát változatlanul hagyja: azok invariánsak ilyenkor;

2. $k:=j-f-j+f$ (kommutátor). Csak az *ejf* csúcs helyéről kiinduló éleken hoz létre változást, a bűvös kocka többi része invariáns marad.

3. $3k$ a k háromszor ismételt alkalmazása: csupán az *ejf* és *hjf*, valamint *ebf* és *eja* eredeti helyén álló csúcsokat cseréli fel egymással, a többi kis kocka helyén marad (l. az ábrát!).

4. $c:=j+4(2f+j)$ (helycserélő transzformáció). Felcseréli egymással a *bf* és *jf* helyén álló kis kockákat, a többi élközép azonban változatlanul marad.

3. A kis kockák rendezésének sorrendje

A megoldás alapgondolata az, hogy az **I. fázisban** rendezzük a $+j$ és $+f$ transzformációkkal szemben invariáns részt, a **II. fázisban** a j és f lapokon az élközepeket, végül a **III. fázisban** a csúcsokat.

I. fázis. A jobb oldali és felső lapra nem való kis kockák rendezése.

1. Betöltjük a bal alsó élet, helyükre visszük a *ba*, *bae* és *bah* kis kockákat.

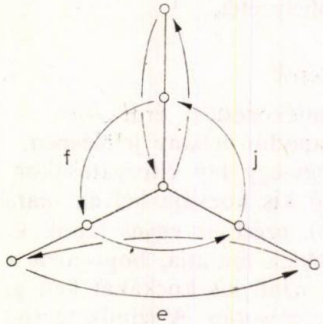
Például: *ba* úgy vihető helyére, hogy azt először *ef* helyére visszük, majd $-e+b$ vagy $2e-a$ alkalmazása után rendes állásban kerül saját helyére. A *bae* pedig az átellenes csúcsból, *jfh* helyéről indítva kerül rendes állásban saját helyére, ha a $-j+2e$ vagy $2j+e$, vagy $2f-e$ transzformációt alkalmazzuk.

(A három lehetőség közül azt kell választani, amely a *bae* csúcs *e*-vel egyező színét az *e* lapközéphez illeszti.) A *bah* hasonló módon *jfe* helyéről indítva kerül saját helyére.

2. Betöltjük a bal alsó él alsó szomszédait, helyükre visszük az *ae*, *ah* élközepeket.

Például: *ae* úgy vihető helyére, hogy először *jf* helyére visszük, majd *je* vagy *fe* helyére aszerint, hogy az *e* lapközéppel melyik helyen érintkezik egyező színnel. Ezután $b+e-b$, illetve $b+2e-b$ fejezi be a műveletet. Az *ah* hasonló módon kezelhető, csak $+b$ helyett $-b$-vel kell a befejező lépést kezdeni.

3. Betöltjük a bal alsó él bal oldali szomszédait, helyükre visszük az *eb*, *hb* élközepeket. (Hasonló módon, mint *ae*-t



és *ah*-t, most is *jf* helyéről indítva az élközepeket, csak $\pm b$ helyett $\pm a$ fog segíteni.)

II. fázis. A jobb oldali és felső lap élközepeinek rendezése.

1. Célszerűen választott n és m egész számokkal ismételten alkalmazzuk az $r=nf+mj$ transzformációt; így f és j köré gyűjtjük a velük egyező színű lapot tartalmazó élközepeket. Ha egy kis kocka ilyenkor más színű lapjával illeszkedik f-hez, illetve j-hez, akkor az $+j$ és $+f$ semmiféle ismételt alkalmazása után sem fog egyező színű lappal illeszkedni, hanem *tükrös* helyzetű. Az ilyen tükrös helyzetű élközepeket rendes állásba vissza kell tükrözni.

Ennek érdekében az **I. fázisban** rendezett invariáns részt átmenetileg meg kell bontani. A tükrözés páronként végezhető pl. úgy, hogy *ef* és *jf* helyére visszük a tükrözni kívánt kis kockákat (r alkalmas és ismételt alkalmazásával), majd végrehajtjuk a $t=e-j-e$ tükrözési transzformációt.

A kialakult helyzetet ismét rendezzük r-rel. Az ilyen tükrözési lépések száma 0 vagy 1, legfeljebb 2 lehet. A tükrözési lépések végrehajtása után a következő lépés megkönnyítése érdekében az f köré gyűjtjük a j-vel egyező színt tartalmazó élközepeket.

2. Helyükre visszük az *fh*, *fe*, *jh*, *je* élközepeket.

Például: *fh* az $f+nj-f$ ekvivalencia transzformációval foglalja el a helyét, ahol n alkalmas módon választott egész (úgy, hogy a *jf* helyén át jusson majd *fh* a saját helyére). A *je* pedig esetleg $2f+nj+2f$ segítségével.

3. Helyére visszük *ja*-t, amennyiben még nincs éppen ott. Ezt $n(2f+2j)$-vel tehetjük, ahol $n=2$ vagy 4. Eközben a **2.** alatt rendezett élközepek helyükre visszakerülnek.

4. Ha *bf* és *jf* is helyére került ugyanakkor, az élközepek rendezése kész. Ellenkező esetben $c=j+4(2f+j)$-vel helycserét kell végrehajtani.

III. fázis. A piros vagy fehér színt tartalmazó csúcsok rendezése.

1. Helyére visszük *bfh*-t rendes állásban. Amennyiben ez nem a *bfe* vagy *jae* helyén áll (esetleg saját helyén áll, de perdülten), akkor az *nk*, *mh* transzformációk ismételt és váltogatott alkalmazása eredményre vezet, ha a k együtthatóinak összege 3 többszöröse; pl. $\pm h+nk\mp h+mk$ jó, ha $n+m=3$.

Az ellenkező eset erre visszavezethető úgy, hogy előtte $\pm e+q\mp e+5q$-t hajtjuk végre, ahol $q=f-j-f+j$.

Figyeljük meg, hogy

$$k=j-f-j+f, \qquad q=f-j-f+j$$

ugyanazokat a mozdulatokat igényli, ha a teljes kockát megfordítjuk magunk előtt úgy, hogy e és h, valamint j és f szerepet cseréljen! Aki a k műveleteit mechanikusan jól begyakorolta, annak ez a megfordítás segítséget jelent, hogy q-t el ne tévessze.

2. Hasonló módon visszük helyére *jah*-t.

3. Ugyanígy megy *jfe* és *bae*, csak a k, q szerepcserét kell tekintetbe venni, és a q együtthatóinak összege most már 6 többszöröse (különben ugyanis *bfh*, *jah* nem kerül vissza a helyére).

4. Ha eközben *jfe* és *jfh* is helyére került rendes állásban, akkor készen vagyunk. Ellenkező esetben még előfordulhat, hogy helyükön vannak, ámde perdülten. Ennek oka az, hogy egyiküket q-nak és k-nak más többszöröse viszi rendes állásban a helyére, mint a másikat. Hogy egyidejűleg mindketten jó állásban perdüljenek helyükre, egyiküket pihentetni kell k alkalmazása közben. Pihenőként alkalmas pl. a *bah* helye. Közben persze ügyelni kell arra, hogy maga *bah* legalább 6 lépésen át aktív legyen, tehát a k hatókörzetében maradjon. Ennek a követelménynek megfelel pl. a $2h+k+2h+$ $+2k+2h+3k+2k=p$ transzformáció. Ha azt tapasztaljuk, hogy ennek egyszeri alkalmazása perdíti ugyan a jobb felső csúcsokat a helyükön, de még mindig

nem a kívánt alapállásba, akkor ismételjük még egyszer! Ez már feltétlenül célra vezet.

4. Megjegyzések

Az ismertetett eljárás egy lehetséges megoldási mód. Nyitva marad a kérdés, hogy lehetne-e „egyszerűbb" megoldást találni, amely egyöntetűbb és kevesebb lépést igényel, könnyebben áttekinthető. A kocka geometriai tulajdonságai sugallnak is ilyet, pl. azt, hogy első fázisban rendezzünk két átellenes csúcsot és azok szomszédait. Ezek invariáns alteret alkotnak a két csúcsot elkerülő torz hatszög oldalain megengedett $k=a+b-a-b$ alakú kommutátorokkal szemben. Az algebrában ilyen kommutátorok haszna az, hogy mutatják, milyen k-ban tér el egymástól $b+a$ és $a+b=k+b+a$.

Az általunk használt esetben a helyett j, b helyett $-f$ áll. $j-f-j+f$ helyett a $j+f-j-f$ kommutátor azért nem célszerűbb, mert nem egy csúcsban összefutó éleken okoz változást, hanem egy térbeli z töröttvonalon, amely a kocka testátlóján átellenes, egymástól távoleső két csúcsot is tartalmaz, és nehezíti az áttekintést.

A megoldás második fázisában megengedett kommutátorokkal rendezzük az élközepeket a torz hatszög oldalain, majd a kommutátorok háromszorosaival a csúcsokat. Kellemetlen, hogy a két átellenes csúcs környezete, mint invariáns altér, 14 kis kockát tartalmaz, nagyobb pl. a $+j$ és $+f$ alkalmazásával szemben invariáns altérnél, amely 13 elemű, leszámítva a bűvös kocka színezetlen középső kis kockáját. Nagyobb invariáns altér kisebb mozgási szabadságot hagy. Ugyanez mondható el a gyakorlatban elterjedt másik igen kézenfekvő megoldásról is, amely először egy lapot rendez. A fent ismertetett megoldásnál a $+j$ és $+f$ invariáns alteréből csupán a tükrözés érdekében léptünk ki átmenetileg, valamint a csúcsok rendezése során.

A megoldások nagy része abból a megfigyelésből indul ki, hogy adott műveletkombináció elég sokszor ismételt alkalmazása előbb-utóbb ismétlődő helyzetre vezet (a változatok véges száma miatt). Ha olyan műveletsorozatot veszünk, amely több élközepet mozgat, mint ahány csúcsot, akkor előfordulhat, hogy a csúcsok a kiinduló állásba kerülnek, az élközepek viszont valamilyen módon cserélődnek. Például $2f+2j$ két ismétlés esetén három élközepet ciklikusan felcserél, a j, f lapjának többi részét pedig a kiinduló állásba visszaviszi. Hasonló megállapítás tehető az $f+j$, $f+2j$, $f+2j-f+2j$ transzformációkról.

Ilyen jellegű transzformáció szerkeszthető továbbá közvetlenül is, a bűvös kocka egyik középső lapjának mozgatásával, pl. $2e+2h+2j+2e+2h+2f$, vagy $e-h+j+h-e-f$. Ez esetben a megoldás fázisai úgy különíthetők el, hogy először a csúcsokat rendezzük, majd azok zavarása nélkül az élközepeket.

Előfordulhat szerencsés eset, amikor a t, p (tükröző, perdítő) transzformációk nem szükségesek a rendezés során (pl. akkor, ha nem nagyon keverjük össze a kockát). Minthogy p elég sok lépésből áll, végrehajtása előtt célszerű végigszámolni, hogy helyette

$$-p = 2p = 2h-3k+2h-2k+2h-k+2h$$

nem jobb-e, ahol

$$-k = -(j-f-j+f) = -f+j+f-j.$$

Esetleg a két csúcs szerepét felcserélve, a teljes kockát megfordítva is juthatunk $2p$ műveleteinél kevesebb lépésben eredményre.

Hasonló számítási munkával még több helyen lehetne rövidíteni a rendezési algoritmust, de sokszor egyszerűbb számolás nélkül mechanikusan ismételni a műveleteket mindaddig, amíg a kívánt színösszeállítás meg nem jelenik.

A bűvös kocka az oktatásban kiválóan felhasználható mind térgeometriai, mind algebrai alapfogalmak bemutatására.

„Matematikatanárok versenyé"-nek 1979. évi győztesei

I. díj:	**Bartha Gábor,**	Móricz Zsigmond Gimnázium, Szentendre
II. díj:	**Bogdán Zoltán,**	Kossuth Lajos Gimnázium, Cegléd
III. díj:	**Szánthó Gyula,**	Kertészeti Szakközépiskola, Gyula
dicséret:	**Leibinger Jánosné,**	Madách Imre Gimnázium, Budapest
	Nyírő László,	III. sz. Általános Iskola, Mezőkövesd

A Bolyai János Matematikai Társulat versenye matematikatanárok számára

A Bolyai János Matematikai Társulat a matematikatanárok önálló szakmai munkájának kibontakoztatására 1979-től évenként feladatmegoldó versenyt rendez. A versenyen részt vehetnek az alsó- és középfokú oktatási intézményekben működő tanítók és tanárok.

A verseny 8—12 feladatát a Versenybizottság júliusban teszi közzé a Társulat Rátz László Vándorgyűlésén, de beszerezhetők a Társulat helyi tagozataiban és központjában is.

A 8—12 feladat közel azonos témakörből kerül kitűzésre. A Versenybizottság a témaköröket a matematikának olyan fejezeteiből választja ki, amelyek ismerete igen jól hasznosítható a korszerű iskolai oktatásban, a tanórai vagy szakköri munkában. A júliusban kezdődő verseny előtt minden évben megjelenik egy 2—3 cikkből álló sorozat A Matematika Tanításában, amely segítséget kíván nyújtani a verseny-feladatsor megoldásához.

A verseny eredményhirdetése minden év decemberében lesz. A Társulat a versenyen legeredményesebben szereplőket pénzjutalomban részesíti.

Az 1980. évi versenyfeladatok témaköre determinisztikus és sztochasztikus játékok. E témakörről Beck József, illetve dr. Bognár Jánosné és dr. Nemetz Tibor írtak egy-egy cikket A Matematika Tanításának 2. illetve 3. számában.

Megkérjük a versenyzőket, hogy minden feladat megoldását külön lapra írják. Részfeladat megoldását is örömmel látjuk. *Beküldési határidő: 1980. október 1. Cím:* Bolyai János Matematikai Társulat „Tanárok versenye", 1061 Budapest, Anker köz 1—3.

Mindenkinek sok sikert kíván a Versenybizottság.

A versenyfeladatok

1. Legyen adva végtelen sok urna és egy nagy zsák tele golyóval! Két játékos, **I** és **II** játssza az alábbi játékot: **I** tetszése szerint elhelyez két golyót az urnákba, **II** pedig elfoglal egy urnát (ettől kezdve ez az övé), utána **I** megint elhelyez két golyót, **II** pedig elfoglal egy újabb urnát, és így tovább. **I** pontosan akkor nyer, ha sikerül elhelyeznie n golyót egy olyan urnába, amit **II** előzőleg még nem foglalt el. Bizonyítsuk be, hogy ha van legalább $2^n - 1$ golyó, akkor **I**-nek van nyerő stratégiája, viszont ha a golyók száma kevesebb, mint $2^n - 1$, akkor **II**-nek van nyerő stratégiája. Mi van akkor, ha minden lépésben **I** k darab golyót helyez el, **II** pedig l $(k > l)$ darab urnát foglal le? Ekkor mennyi az a legkevesebb golyó, amivel **I**-nek nyerő stratégiája van?

2. A következő feladat az Amőba játékok cikk $\mathcal{F}_n(OX)$ nevű játékának általánosítása. Legyen adva egy n-esekből álló $\mathcal{F}_n$ halmazrendszer s legyen $S = \bigcup_{A \in \mathcal{F}_n} A$. A két játékos, **I** illetve **II**, lépésenként 2-2 darab S-beli elemet vesznek ki egyszerre, s **I** akkor nyer, ha sikerül lefednie valamelyik $\mathcal{F}_n$-beli halmaz összes elemét, egyébként pedig **II** nyer. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathcal{F}_n$-nek $3^{\frac{n}{2}-1}$-nél kevesebb n-ese van, akkor **II**-nek van nyerő stratégiája. Mi a helyzet akkor, ha **I**, illetve **II** lépésenként k darab, illetve l darab S-beli elemet vesznek ki egyszerre?

3. Tekintsük az előző feladatban tárgyalt játékot, s legyen k osztója n-nek! Konstruáljunk olyan $\mathcal{F}_n^*$ halmazrendszert, mely $(1+l)^{\frac{n}{k}-1}$ darab n-esből áll, s a rajta való játékban **I**-nek van nyerő stratégiája!

4. Az alábbi két feladat gráfjátékokról szól. Tekintsünk egy n-pontú teljes gráfot, s a két játékos, **I** és **II**, felváltva vesznek ki 1-1 élt! **I** nyer, ha a játék végére az általa kivett élek halmaza tartalmaz háromszöget, azaz három páronként egymáshoz csatlakozó élt. Bizonyítsuk be, hogy ha n elég nagy, akkor **I**-nek nyerő stratégiája van! Módosítsuk úgy a feladatot, hogy **II** lépésenként k darab élt vegyen ki egyszerre! (**I** továbbra is csak egy élt vegyen ki lépésenként.) **I** ismét akkor nyerjen, ha az általa kivett élekben van háromszög. Igaz-e, hogy **I**-nek még $k=100$ esetén is van nyerő stratégiája, ha n elég nagy?

5. Egy n pontú gráfot *összefüggőnek* nevezünk, ha bármely pontból bármely másikba el lehet jutni a gráf élein haladva. Ezzel ekvivalens definíció az (s reméljük, hogy a kedves Olvasó ellenőrzi is állításunkat), hogy akárhogyan is osztjuk két nem üres osztályba az n pontot, van a gráfnak olyan éle, mely különböző osztálybeli pontokat köt össze.

Tekintsünk mármost egy n-pontú teljes gráfot, s két játékos, **I**, illetve **II**, felváltva vegyenek ki egy-egy élt! **I** nyer, ha az általa kivett élek n pontú összefüggő gráfot alkotnak. Bizonyítandó, hogy **I**-nek van nyerő stratégiája. Módosítsuk úgy a feladatot, hogy **I** lépésenként továbbra is csak egy élt, **II** viszont lépésenként egyszerre k darab élt vegyen ki! **I** megint akkor nyerjen, ha az általa kivett élek n pontú összefüggő gráfot alkotnak. Igaz-e, hogy **I**-nek még $k=100$ esetén is van nyerő stratégiája, ha n elég nagy?

6. Egy utazó fel akar jutni a Mount Everestre. A legmagasabban fekvő nepáli falu hét napi járóföldre van a csúcstól (az adatok nem valósak!). Egy nepáli teherhordó x kilogramm (x nem feltétlenül egész szám) élelmiszert tud szállítani, s egy embernek egy nap folyamatosan egy kilogramm élelmiszert kell elfogyasztania. Vajon $x=2{,}2$ esetén utazónk meg tudja-e sikeresen szervezni a csúcs megmászását a faluban élő ötezer nepáli segítségével? A kedves Olvasó legkevesebb hány ember felfogadásával tudná megszervezni az expedíciót? Megjegyzés: az élelmiszer korlátlanul osztható részekre, továbbá a földre lerakni, raktározni tilos, csak egymásnak szabad átadni.

7. A következő feladat a Játék és valószínűség c. cikk Véletlen amőba játékához kapcsolódik.

Tekintsünk egy végtelen négyzetrácsot, amelynek egyik rácspontjából elindulva egy korongot mozgatunk, mégpedig 1 egységgel jobbra, ha egy feldobott érmén fej van felül, különben egységgel felfelé! A korong által meglátogatott helyeket sorban megjelöljük egy-egy karikával. Ha n szomszédos karika egy egyenesbe kerül („vízszintesen" vagy „függőlegesen"), akkor EGYENES nyer, ha pedig „lépcső" keletkezik n szomszédos karikából (tehát váltakozó fej-írás sorozat esetén), akkor LÉPCSŐ nyer. Játsszuk ezt a játékot olyan érmével, amelyikkel a fejet p valószínűséggel dobhatjuk

$(0<p<1)$! *a)* Határozzuk meg $n=3$, 4-re, hogy kinek előnyös a játék! *b)* Hány dobásból áll átlagban egy játék? *c)* Legyen $p=1/3$ és $n=3$. Tegyük fel, hogy EGYENES 1 Ft-ot, LÉPCSŐ 6 Ft-ot kap nyerés esetén társától. Kinek előnyös ekkor a játék?

8. Egy szabályos érmét ismételten feldobva az FIFI sorozat megjelenéséhez átlagosan m_1, az IFII sorozat megjelenéséhez átlagosan m_2 dobás szükséges.
a) Mutassuk meg, hogy $m_1>m_2$.
b) Káin a következő játékot ajánlja Ábelnek: „Ha az FIFI sorozat előbb jelenik meg, mint az IFII sorozat, akkor én nyerek, ellenkező esetben te." Kinek kedvez a játék?

9. Egy véges hosszúságú fej-írás sorozat átlagos várakozási idejének nevezzük azt a számot, amely megadja, hogy átlagban hány dobásra van szükség a sorozat megjelenéséig. Bizonyítsuk be, hogy az n hosszúságú fej-írás sorozatok átlagos várakozási idejének minimális értéke 2^n, maximális értéke pedig $2^{n+1}-2$.

10. Két, külsőre egyforma doboz közül az egyikben 3 piros és 1 kék golyó van (nevezzük ezt piros doboznak), a másikban pedig 3 kék és 1 piros (kék doboz). A két doboz közül kisorsolnak egyet $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right.$ valószínűséggel$\left.\right)$, ennek a színét kell eltalálni. Ebből a célból visszatevéssel húzunk belőle addig, amíg a kihúzott golyók között az egyik szín n-nel többször fordul elő mint a másik és tippünk a „vezető" szín lesz. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $1-\frac{1}{3^n+1}$ valószínűséggel eltaláljuk a doboz színét!

11. Két játékos, PÁROS és PÁRATLAN játszik. Mindegyikük egy vagy két érmét rejthet a markába. Ha ketten együtt 3 érmét dugtak, akkor PÁRATLAN feldob 3 kockát s a dobott számok összegét nyeri PÁROStól, ha pedig 2, illetve 4 a dugott érmék száma, akkor PÁROS dob fel 2, illetve 4 kockát s ő nyeri a kockákkal dobott számok összegét PÁRATLANtól. Kinek kedvez ez a játék? Van-e PÁROSnak (PÁRATLANnak) „jó" véletlen stratégiája, s ha igen, mekkora nyereményre tehet szert?

Az iskolarádió matematika tárgyú adásai az 1980/81-es tanévben

Az új tantervek problémáival foglalkozunk továbbra is a *Katedra* sorozat 4 új, 30 perces műsorában:

augusztus 21. és 22.	Hogyan tanítsunk számolni az általános iskolában?
szeptember 11.	Az új tanterv fogadtatása a szakközépiskolákban.
szeptember 12.	Az új tanterv fogadtatása a gimnáziumokban.

*

Folyamatosan reagál a tanítás-tanulás mindennemű kérdésére a hetenként jelentkező *Nem tudom a leckét!* c. 30 perces *élőben sugárzott* adás. (Szeptembertől minden második pénteken a Petőfi rádióban 17 órakor, a közbülső hetekben, ugyancsak pénteken 19 órakor a 3. műsorban.) Mint eddig is, nyilván ezután is sok, matematikával kapcsolatos kérdés kerül majd terítékre. Ez a *telefonos* műsor kiváló alkalom a problémák idejében való megbeszélésére vagy legalábbis feltárására, de az a hallgatókon múlik, hogy szócső vagy vitafórum lesz-e az adásból.

*

A *Nyitnikék* műsor új sorozatot készít, átlag minden másodikban 6—10 perces „matek" blokkal. Ezekben C. Neményi Eszter játszik gyerekekkel, és bizonyára sok jól használható ötletet hallunk majd.

*

A *Törd a fejed!* műsor a közelmúltban ismétlési lehetőséget is kapott, de nem túlszerencsés időpontban. Az új tanévben már a délutáni (kedd, 15.15—15.25, 3. műsor) adást két napra követi a délelőtti ismétlés (csütörtök, 9.20—9.30, 3. műsor).

*

Nagyot léptünk a középiskolásoknak készülő, (de az általános iskola utolsó éveiben is gyakran használható) *Véges végtelen* c. adásokkal. A sorozatot jelentős mértékben sűrítettük. *Csaknem minden héten jelentkezünk.* A témakört kibővítjük: a matematika mellett helyet kap a fizika, sőt a technika is. Ugyanakkor megkezdjük a jónak ítélt régebbi adások ismétlését is (többet átdolgozott formában).

Az adás időpontját későbbre toltuk. *A 17 órai kezdés* lehetővé teszi az otthoni meghallgatást diáknak, tanárnak. (A tapasztalat szerint kevesen hallgatták csoportosan az adást, így viszont az egyéni meghallgatáson túlmenően a magnófelvétel készítésének lehetősége is jobbnak ígérkezik.)

Arra szeretnénk rávenni a matematika és a természettudományok iránt érdeklődő embereket, hogy szerdán délután 5 órakor kapcsolják be a 3. műsort, mert ott ezekben a témakörökben mindig hallhatnak valamit. (A Véges végtelen kimaradó heteiben biológia lesz ebben az időben.)

Az egyes adások címét a Rádióújság közli. Az idén nem tudtuk megoldani, de reméljük, hogy a jövő tanévben sikerül megküldenünk az adások rövid vázlatát azoknak a kollégáinknak, akik ezt igénylik (ez egyszerűen címük megírásával történhet).

*

Új műsor lesz a *Homo ludens* (négyhetenként pénteken a Kossuth adón 17.15—17.35). Ebben ugyan nemcsak matematikai játékokkal akarunk foglalkozni, de melyik játéknak nincs köze a matematikához, és melyik matematikus nem szeret játszani?

Játékaink skálája olyan széles lesz, amilyenné csak tenni tudjuk, és ehhez kérjük mindenkinek a támogatását, akinek csak kedve van hozzá. A „stábot" nyitottan kívánjuk tartani, bárki munkatársunk lehet, ha mutat vagy küld használható játékot. (Cím: Herczeg János, Iskolarádió, 1800 Budapest, Bródy Sándor u. 5—7.)

ROZGONYI TIBOR
főiskolai tanársegéd
Nyíregyháza

Jelentés a Tanárképző Főiskolák 1980. évi Országos Matematikai Tanulmányi Versenyéről

A versenyt 1980. április 21-én és 22-én a Nyíregyházi Bessenyei György Tanárképző Főiskolán rendezték, amelyen a Ho Si Minh TKF (Eger), a Ho Si Minh TKF Kihelyezett tagozata (Csepel), a Juhász Gyula TKF (Szeged), a Pécsi TKF, a Szombathelyi TKF és a Bessenyei György Tanárképző Főiskola (Nyíregyháza) öt-öt hallgatója vett részt. A Bolyai János Matematikai Társulat Elnökségének felkérése alapján a versenybizottság

elnöke: Hódi Endre osztályvezető, OPI,
titkára: Rozgonyi Tibor főiskolai tanársegéd (Nyíregyháza),
tagjai: Darvasi Gyula főiskolai adjunktus (Nyíregyháza),
Kamarás Lajos főiskolai docens (Pécs),
Pogáts Ferenc főiskolai adjunktus (Csepel),
Sebestyén József főiskolai tanársegéd (Szombathely),
Dr. Szepessy Bálint főiskolai docens (Eger),
Szerényi Tibor főiskolai docens (Szeged)

voltak.

A kitűzött feladatok megoldására az első nap délelőttjén 5 óra állt a versenyzők rendelkezésére. Délután közös nyírbátori—vajai autóbusz-kirándulás volt a program. A második napon került sor a megoldások ismertetésére és az ünnepélyes eredményhirdetésre. A versenybizottság egyhangúlag a következő határozatot hozta:

I. díjat kapott:

Almássy Zoltán,	Nyíregyháza,
Ökrös László,	Eger.

II. díjat kapott:

Janics Zsuzsanna,	Szeged,
Máté Bálint,	Pécs,
Nagy Zoltán,	Eger,
Rubóczky György,	Csepel,
Steierlein István,	Pécs.

III. díjat kapott:

Ambrus Gabriella,	Csepel,
Bőr Ferenc,	Nyíregyháza,
Erdélyi Gábor,	Nyíregyháza,
Fodor Tibor,	Pécs,
Szabó Mária,	Szombathely.

Dicséretben részesült:

Orbán Mária,	Szombathely,
Darázs Katalin,	Szeged,
Kis Nikolette,	Szombathely,
Rózsavölgyi László,	Pécs.

A Bolyai János Matematikai Társulat 500,— Ft-os különdíját nyerték:

Almássy Zoltán,	Nyíregyháza,
Ökrös László,	Eger.

200,— Ft-os különdíját:

Bőr Ferenc,	Nyíregyháza,
Máté Bálint,	Pécs,
Nagy Zoltán,	Eger,
Rubóczky György,	Csepel,
Steierlein István,	Pécs.

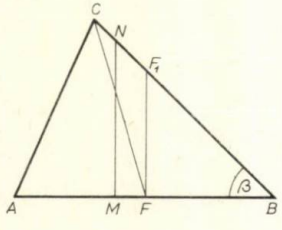
A kitűzött feladatok és megoldásuk

1. feladat

Szerkesszünk olyan egyenest, amely merőleges egy adott háromszög egyik oldalára, és két egyenlő részre osztja a háromszög területét!

Megoldás:

Legyen a keresett egyenesnek az oldalakkal való metszéspontja M és N. Ha M egybeesik az AB oldal F felezőpontjával, akkor a CF súlyvonal a szerkesztendő egyenes.



Ha nem, akkor

$$\frac{t}{2} = \frac{MB \cdot NB \cdot \sin\beta}{2} = \frac{FB \cdot CB \cdot \sin\beta}{2};$$

innen

$$\frac{MB}{FB} = \frac{CB}{NB}.$$

Állítsunk merőlegest F-ben az AB oldalra!
Ennek és a CB oldalnak F_1 metszéspontjára a párhuzamos szelők tétele szerint

$$\frac{MB}{FB} = \frac{NB}{F_1B}$$

érvényes, ezért

$$\frac{CB}{NB} = \frac{NB}{F_1B};$$

azaz NB mértani közepe az ismert CB és F_1B szakaszoknak, ennek alapján az N pont és így a keresett MN egyenes is könnyen megszerkeszthető.

2. feladat

Az a összetett természetes szám legkisebb valódi osztója nagyobb $\sqrt[3]{a}$-nál. Bizonyítsuk be, hogy a két prímszám szorzata!
Igaz-e az állítás megfordítása?

Megoldás:

Tételezzük fel, hogy a felírható három szám szorzataként:

$$a = b \cdot c \cdot d \quad (\text{ahol} \quad 1 < b \leqq c \leqq d) \quad \text{és} \quad b, c, d \quad \text{nem}$$

feltétlenül prímek!

A feltétel szerint $b > \sqrt[3]{a}$. Írjunk b, c és d helyére $\sqrt[3]{a}$-t!

$$a > \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a.$$

Ez pedig ellentmondás.
Ezért a két prímszám szorzata.
Az állítás megfordítása általában nem igaz, mert pl.

$$a = 14 = 2 \cdot 7 \quad \text{esetében} \quad 2 < \sqrt[3]{14}.$$

Ha azonban $a = p^2$, ahol p prímszámot jelöl, akkor $p = \sqrt{a} > \sqrt[3]{a}$, tehát prímszámok négyzetére igaz az állítás megfordítása.

3. feladat

Legyen B az S halmazon értelmezett olyan kétváltozós művelet, hogy

$$B[B(x, y), B(u, z)] = B(x, z) \quad \text{minden} \quad x, y, u, z \in S\text{-re!}$$

Bizonyítsuk be, hogy

a) ha $B(a, b) = c$, akkor $B(c, c) = c$;
b) ha $B(a, b) = c$, akkor $B(a, x) = B(c, x)$ minden $x \in S$-re!

Megoldás:

a) $[x, y, u, z] = [a, b, a, b]$ választással, mivel $B(a, b) = c$, ezért B tulajdonsága miatt:

$$B(c, c) = B[B(a, b), B(a, b)] = B(a, b) = c.$$

b) Az $[x, y, u, z] = [c, c, x, x]$ választással *a)*-t és B tulajdonságát felhasználva:

$$B(c, B(x, x)) = B[B(c, c), B(x, x)] = B(c, x).$$

Másrészt az $[x, y, u, z] = [a, b, x, x]$ választással

$$B(c, B(x, x)) = B[B(a, b), B(x, x)] = B(a, x),$$

tehát csakugyan

$$B(a, x) = B(c, x)$$

minden $x \in S$-re.

4. feladat

Határozzuk meg az összes olyan $P(x) \not\equiv 0$ polinomfüggvényt, amelyekre teljesül, hogy

$$P(x) \cdot P(x^2+1) = P'(x^k+2x^2+1),$$

ahol $k \in N$.

Megoldás:

Legyen $P(x)$ n-edfokú! Ekkor a feltételi egyenlet két oldala fokszámának egyenlőségéből

$$3n = (n-1)k,$$

ebből pedig

$$k = 3+\frac{3}{n-1} \quad (k \in N).$$

Két eset lehetséges:

I. Ha $n=2$, akkor $k=6$; illetve **II.** ha $n=4$, akkor $k=4$.

Vizsgáljuk az **I.** esetet, amikor tehát $P(x)=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$. Ezt $P(x^2+1)=$ $=[a(x^2+1)^2+b(x^2+1)+c]$-vel szorozva a műveletek elvégzése és az egynemű tagok összevonása után azt kapjuk, hogy

$$P(x) \cdot P(x^2+1) = a^2x^6+abx^5+a(2a+b+c)x^4+b(2a+b)x^3+(a^2+ab+3ac+bc)x^2+ \\ +b(a+b+c)x+c(a+b+c).$$

Ugyanakkor

$$P'(x^6+2x^2+1) = 2a(x^6+2x^2+1)+b = 2ax^6+4ax^2+2a+b.$$

A megfelelő együtthatók összehasonlításával adódó egyenlőségek ellentmondást tartalmaznak, tehát az **I.** esetben nincs megoldás.

A **II.** esetben ugyanígy járunk el $n=k=4$-gyel számolva, s az azonos fokszámú tagok együtthatóit összehasonlítva szintén ellentmondásra jutunk. Eszerint nincs olyan $P(x) \not\equiv 0$ polinomfüggvény, amely kielégítené a feladatban megadott feltételi egyenletet.

5. feladat

Legyen $a_1 > 0$ és $a_{n+1} \geqq a_n + n^p$, ahol p rögzített pozitív számot jelöl!

Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ sor konvergens!

Megoldás:

Rekurzióval kapjuk, hogy $a_{n+1} \geqq a_n + n^p \geqq a_{n-1} + (n-1)^p + n^p \geqq \ldots \geqq a_1 + 1^p + 2^p + \ldots$ $\ldots + n^p = a_1 + n \cdot \frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n} > a_1 + n \cdot (\sqrt[n]{n!})^p$ a pozitív számok számtani és mértani közepe között fennálló egyenlőtlenség alapján. Innen

$$\frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{a_1 + n \cdot (\sqrt[n]{n!})^p} < \frac{1}{n^{1+p}} \cdot \left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)^p < \frac{1}{n^{1+p}} \cdot K,$$

ahol K az $\left\{\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right\}^p$ sorozatnak egy felső korlátja. Mivel a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+p}}$ sor konvergens, ezért az eredeti sor is konvergens.

6. feladat

Legyen

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} \sin^{2n} x \cdot \operatorname{ctg} x, & \text{ha } x \neq k\pi; \\ 0, & \text{ha } x = k\pi; \end{cases} \quad (k \in \mathbf{Z}.)$$

továbbá

$$M_n = \max_{-\infty < x < \infty} f_n(x).$$

Számítsuk ki a $\lim_{n \to \infty} M_n$ határértéket!

Megoldás:

Mivel $f_n(x)$ π szerint periodikus, elegendő csak a $[0; \pi]$ zárt intervallumon keresni a maximumát. Itt $f_n(x)$ folytonos lévén, van maximuma, ami a $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nyitott intervallumba esik (a $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ szakaszban $f_n(x) < 0$). Mivel

$$f_n'(x) = \sqrt{n} \cdot \sin^{2n-2} x (2n \cos^2 x - 1), \quad (x \neq k\pi)$$

ezért $f_n'(x) = 0$ a $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nyílt intervallumban csak akkor teljesül, ha

$$x = \arccos \frac{1}{\sqrt{2n}} \quad (n \in \mathbf{N}^+).$$

Ennélfogva

$$M_n = f_n\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \sqrt{n}\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{2n}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2n}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2n}}} \to \frac{1}{\sqrt{2e}}, \quad \text{ha } n \to \infty.$$

7. feladat

Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan egyenlő oldalélű négyzetes gúla, amelynek valamennyi éle, azonkívül felszíne és térfogata is egész mérőszámú!

Megoldás:

Jelölje a az alapél, b az oldalél, h az oldalmagasság, m a testmagasság mérőszámát, A az egész felszínt, végül V a térfogatot!
Ekkor teljesülnek a következő összefüggések:

$$(1)\quad m^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2,$$

$$(2)\quad h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2,$$

$$(3)\quad A = a^2+2ah,$$

$$(4)\quad V = \frac{1}{3}a^2m.$$

(3)-ból adódik, hogy h-nak racionális számnak kell lennie. Ebből és (2)-ből arra következtetünk, hogy

a) a-nak páros számnak,
b) h-nak egész számnak kell lenni.

(1), (4), *a)* és *b)* felhasználásával hasonlóképpen kapjuk, hogy m-nek is egész számnak kell lennie.

Könnyen belátható, hogy m, h és b tekinthetők páronként relatív prímeknek.

Ugyanígy belátható az is, hogy ebben az esetben m, h és b a p és q pozitív egész értékeket felvevő két paraméterrel következőképpen állítható elő:

$$m = |-p^2+2pq+q^2|,\ h=p^2+q^2,\ b = p^2+2pq-q^2;$$

ahol $p>q$, p és q relatív prímek és ezenkívül különböző paritásúak.

Ebből következik:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 4pq(p+q)(p-q).$$

Az utóbbi egyenlet azonban csak abban az esetben állhat fenn, ha $p=t^2$, $q=u^2$, $p+q=v^2$ és $p-q=w^2$; ahol t, u, v, w páronként relatív prím pozitív egész számok.

Ha tehát léteznek valamely m, h, b és $\frac{a}{2}$, páronként relatív prím pozitív egész számok, amelyek kielégítik az (1)—(4) egyenleteket, akkor négy kisebb pozitív egész számot is találunk, mégpedig sorrendben a w, t, v és u számokat, amelyek ugyanilyen tulajdonságúak. (A legegyszerűbb azt belátni, hogy $h>t$.) Ez a végkövetkeztetés azonban ellentmondásra vezet, mivel pozitív egész számok monoton csökkenő sorozatának feltétlenül végesnek kell lennie. Ebből folyik, hogy nem létezik olyan egyenlő oldalélű négyzetes gúla, amelynek valamennyi éle, azonkívül felszíne és térfogata is egész mérőszámú.

Közlemény

A Matematika Tanítása szerkesztősége köszönetet mond mindazoknak, akik véleményüket nyilvánították a lap ez évi **1.** számában felvetett kérdésekkel kapcsolatban.

A következő számokban alkalmasint közölni kívánjuk a beérkezett írásoknak közérdeklődésre számot tartó részleteit, mégpedig beküldőjük nevével — amennyiben hozzájárulnak ehhez.

E célból kérjük, hogy azok a Kedves Olvasóink — akik küldtek be válaszokat, de *nem kívánják*, hogy azokat, illetve azok egyes részeit *nevük kiírásával* tegyük közzé —, a jelen szám kézhezvételétől számított *20 napon belül* szíveskedjenek ezt a szerkesztőség tudomására adni. Fáradozásukat előre is köszönjük.

Ha valamelyik érintett Kedves Olvasónktól nem kapunk ilyen értesítést (az említett határidőig), akkor azt úgy tekintjük, hogy az illető beleegyezik nevének kiírásához.

FELADATOK

Rovatvezető: POGÁTS FERENC

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor u. 10., II. 10., 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: a lap kézbesítésétől számított 20. nap.

933. Bizonyítsuk be, hogy az A alaphalmaz X, Y, T részhalmazaira

$$T = (X \cap \overline{T}) \cup (Y \cap \overline{T}) \cup (\overline{X} \cap T \cap \overline{Y})$$

akkor és csak akkor teljesül, ha $X = Y = \emptyset$. ($\overline{H}$ jelöli H-nak az alaphalmazra vonatkozó komplementerét.)

934. Egy háromszög egyik oldala 16 hosszúságegység, az ezzel szemközti szög cosinusa $-\frac{1}{4}$. Mekkora a másik két oldal hossza, ha ezek is egész számok?

935. Legyen $f(x)$ az egész számok feletti polinomgyűrű egy eleme! Bizonyítsuk be, hogy ha az

$$a_i = f(i) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

sorozat n egymást követő elemének k-adik hatványösszege osztható n-nel, akkor a sorozat bármely n egymás utáni elemének k-adik hatványösszege is osztható n-nel!

Matolcsy Kálmán, Debrecen

936. Mi annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy téglalap alakú szőnyeget kiteríthessünk egy ugyancsak téglalap alakú üres helyiség padozatán?

937. A, B, C és D a térnek négy olyan pontja, hogy minden, az A és B pontokat tartalmazó sík vagy gömbfelület metsz minden (az előbbiektől különböző) olyan síkot vagy gömböt, amelyre C és D illeszkedik.

Milyen helyzetű a négy pont?

938. Legyen $\{\alpha_n\}$ pozitív számsorozat, legyen továbbá

$$a_1 = 1 \quad \text{és} \quad a_{n+1} = a_n + \alpha_n a_n^{-1}$$

minden pozitív n egészre!

Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n$ akkor és csak akkor létezik, ha $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ véges!

Feladatmegoldások (920—926.)

920. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adva van a beírt kör sugara, továbbá az egyik csúcsából induló magasságszakasz és súlyvonalszakasz!

Kőváry Károly, Budapest

I. megoldás: Tegyük fel, hogy szerkeszthető a ϱ, m_a, s_a adatokkal rendelkező ABC háromszög (l. az ábrát!). Akkor teljesül a

$$2\varrho < m_a \leqq s_a \tag{1}$$

egyenlőtlenséglánc.

Az $m_a = s_a$ esetet könnyen kizárhatjuk a további vizsgálatokból: $m_a = s_a \leqq 2\varrho$ esetén nincs megoldás, hiszen nem teljesülnek az (1) alatti szükséges feltételek; $2\varrho < m_a = s_a$ esetén mindig van egyetlen egyenlő szárú háromszög megoldás, amely könnyen szerkeszthető.

Tegyük fel most már, hogy szerkeszthető a ϱ, $m_a \neq s_a$ adatokkal rendelkező háromszög. Akkor szerkeszthető az ADE derékszögű háromszög, és teljesül a

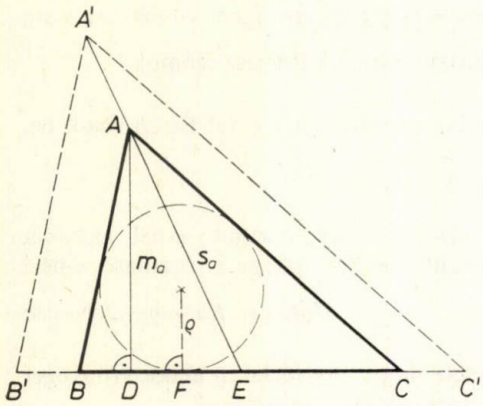
$$2\varrho < m_a < s_a \tag{2}$$

egyenlőtlenséglánc. Az ábra hegyesszögű ABC háromszöget mutat, de derékszögű és tompaszögű háromszög akármelyik csúcsából induló magasság- és súlyvonalszakasz esetére is érvényes az előző megállapítás. Ebből következik, hogy ha nem teljesül az adatokra a (2), azaz igaz a $\neg(2\varrho < m_a \wedge m_a < s_a)$ negáció, akkor nincs megoldás. (Az előbbi negációt helyettesíthetjük a $2\varrho \geqq m_a \vee m_a \geqq s_a$ diszjunkcióval.)

Ha most megpróbáljuk elkezdeni a szerkesztést, akkor az adott m_a, s_a szakaszokkal $m_a < s_a$ esetén szerkeszthetünk az ADE-vel egybevágó $A_1D_1E_1$ háromszöget. Vessük fel: nem tudnánk-e először a keresetthez hasonló háromszöget szerkeszteni? Ennek érdekében folytassuk az abbahagyott gondolatmenetet.

A megszerkeszthetőnek feltételezett $ABC\triangle$ síkjára hajtsunk végre E centrumú centrális hasonlóságot valamilyen pozitív aránnyal. Akkor ez az $ABC\triangle$-et az $A'B'C'$-$\triangle$ be viszi át (az oldalak legyenek a, b, c, illetve a', b', c').

Az elkezdett szerkesztés folytatására kínálkozik A_1' felvétele az E_1A_1 félegyenesen, vagy B_1', C_1' felvétele D_1E_1-en E_1-től egyenlő távolságra, de ϱ nélkül nem látunk lehetőséget a továbbhaladásra.



Keressünk ezért kapcsolatot ϱ, m_a és s_a között! Az $ABC\triangle$ területe felírható ϱ-val is, m_a-val is:

$$\varrho s = \frac{1}{2} a m_a, \tag{3}$$

ahol s a félkerület. Ez, valamint a vele ekvivalens

$$\frac{2s}{a} = \frac{m_a}{\varrho},$$

$$\frac{a+b+c}{a} = \frac{m_a}{\varrho},$$

$$\frac{b+c}{a} = \frac{m_a - \varrho}{\varrho} \tag{4}$$

egyenletek teljesülnek, mert feltettük, hogy szerkeszthető az $ABC\triangle$. Továbbá az $ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$ reláció következtében ezek is érvényesek:

(5), (6)
$$\frac{b+c}{a}=\frac{b'+c'}{a'},\quad \frac{b'+c'}{a'}=\frac{m_a-\varrho}{\varrho}.$$

Kíséreljük meg folytatni az abbahagyott szerkesztést. Feltettük, hogy az adatokra fennáll $2\varrho<m_a$, de akkor ebből következően $\varrho<m_a-\varrho$ is, ennélfogva (6) alapján, ha a_1'-t tetszőlegesen felvesszük, megszerkeszthetjük a másik két oldal összegét, $(b_1'+c_1')$-t, és ez $m_a-\varrho>\varrho$ miatt nagyobb lesz a_1'-nél. Ezzel az a_1'-vel jelöljük ki D_1E_1-en a B_1', C_1' pontokat.

Ezekután az E_1A_1 félegyenesen keressük azt az A_1' pontot, amelynek B_1'-től és C_1'-től vett távolság-összege az előbb megszerkesztett $b_1'+c_1'$. A síkon a B_1', C_1' pontokra ekkora összeget adó pontok halmaza a B_1', C_1' fókuszú $b_1'+c_1'$ nagytengelyű ellipszis. Ennek és az E_1A_1 félegyenesnek az egyértelműen meghatározott metszéspontját meg tudjuk szerkeszteni merőleges affinitás segítségével (l. pl. Hajós: Bevezetés a geometriába, Budapest, 1962. 428—429. oldal). A nyert $A_1'B_1'C_1'\triangle$-höz hasonlót szerkesztünk az A_1-en át húzott párhuzamosokkal. Az így előálló $A_1B_1C_1\triangle$ A_1 csúcsából húzott magasság- és súlyvonalszakasz egyenlő az adott m_a-val, illetve s_a-val. Már csak azt kell kimutatnunk, hogy a beírt körének sugara is egyenlő az adott ϱ-val. A (6) alapján teljesül a

$$\frac{b_1'+c_1'}{a_1'}=\frac{m_a-\varrho}{\varrho}$$

egyenlet; az $A_1B_1C_1\triangle \sim A_1'B_1'C_1'\triangle$ reláció fennállása miatt

$$\frac{b_1+c_1}{a_1}=\frac{b_1'+c_1'}{a_1'}$$

is igaz; ennek következtében

$$\frac{b_1+c_1}{a_1}=\frac{m_a-\varrho}{\varrho},\quad \text{továbbá}\quad \varrho s_1=\frac{1}{2}a_1m_a,$$

majd ebből

(7)
$$\varrho=\frac{t_1}{s_1}$$

is, ahol s_1, t_1 az $A_1B_1C_1\triangle$ félkerülete, illetve területe. A t_1/s_1 hányados viszont az $A_1B_1C_1\triangle$ beírt körének sugarával egyenlő, minthogy pedig (7) teljesül, kimutattuk, amit akartunk.

Azt kaptuk, hogy a (2) feltételek elégségesek is, és az egyetlen megoldás szerkesztésére eljárást is adtunk.

II. megoldás: Tegyük fel, hogy szerkeszthető a kívánt háromszög úgy, hogy $b>c$ teljesül! Akkor érvényesek a (2) feltételek, továbbá ϱ, m_a és az oldalak közt fennáll a (4) kapcsolat. Vegyük szemügyre a beírt kör F érintési pontját az a oldalon! Ismeretes, hogy $FC=s-c$. Minthogy az ADE háromszöget könnyű megszerkeszteni, nézzük, hogy a DE szakaszon hogyan helyezkedik el az F pont:

(8)
$$FE=s-c-\frac{a}{2}=\frac{b-c}{2}.$$

Az ABD és az ADC derékszögű háromszögből m_a^2-et felírva a könnyen szerkeszthető DE-t az oldalakkal hozhatjuk kapcsolatba:

$$c^2-\left(\frac{a}{2}-DE\right)^2=b^2-\left(\frac{a}{2}+DE\right)^2,$$

ebből pedig

(9)
$$2a\cdot DE=b^2-c^2$$

adódik. A (9)-ből (8) segítségével az

$$FE=\frac{a\cdot DE}{b+c}$$

egyenletet, majd ebből (4) alapján az

(10)
$$FE=\frac{\varrho\cdot DE}{m_a-\varrho}$$

egyenletet kapjuk. A legutóbbi alapján FE megszerkeszthető.

A (10) alapján egyszerű szerkesztési eljárást hajthatunk végre, a szerkesztés helyességének igazolása azonban nem könnyű.

Bartha Gábor, Szentendre; Ihász László, Nagybajom; Kacsó Ferenc, Marosvásárhely; Kondor Judit, Budapest és Kun Péter Szentendre

A megoldók száma: 10.

921. Írjuk fel zárt alakban az

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (3i-1)^2$$

összeget!

Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény

Megoldás: A négyzetre emelés után tagonként összegezve

$$S_n = 9\sum_{i=1}^{n} i^2 - 6\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1.$$

Felhasználva az első n természetes szám négyzetösszegére, illetve összegére vonatkozó ismert formulákat, kapjuk:

$$S_n = 9\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 6\frac{n(n+1)}{2} + n.$$

Ebből pedig kiemelés és összevonás után

$$S_n = \frac{n(6n^2+3n-1)}{2}.$$

Bagi Gábor, Barcs és Zalán Péterné, Budapest

A megoldók száma: 41.

922. Az (x_n) és az (y_n) sorozatot a következő módon definiáljuk:

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 1, \\ 3x_{n-1} + 4y_{n-1} + 1, & \text{ha } n > 1, \end{cases}$$

$$y_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 1, \\ 2x_{n-1} + 3y_{n-1} + 1, & \text{ha } n > 1. \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy az $(x_n^2 + x_n + 1)$ sorozat elemei páratlan számok, az (y_n^2) sorozat elemei pedig háromszögszámok.

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: Az $(x_n^2 + x_n + 1)$ sorozat elemei páratlan pozitív egészek, mert x_n pozitív egész az (x_n), (y_n) definíciója miatt és így $x_n^2 + x_n = x_n(x_n+1)$ szomszédos egészek szorzata, ami mindig páros.

Az (y_n^2) sorozat elemei akkor háromszög-számok, ha minden n pozitív egészhez található olyan k természetes szám, hogy

$$y_n^2 = \sum_{i=1}^{k} i, \quad \text{azaz} \quad y_n^2 = \frac{k(k+1)}{2} \tag{1}$$

Az (x_n) és (y_n) sorozatok első négy-négy eleme:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 8,\ x_3 = 49,\ x_4 = 288,$$

$$y_1 = 1,\ y_2 = 6,\ y_3 = 35,\ y_4 = 204.$$

Ezekre könnyen látható, hogy

$$y_n^2 = \frac{x_n(x_n+1)}{2} \quad (1 \leqq n \leqq 4). \tag{2}$$

Az (y_n) sorozat elemeinek sorszámára vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk, hogy (2) minden pozitív n egészre igaz. $n = 1$-re, mint fentebb láttuk, igaz. Tegyük fel, hogy (2) igaz valamely rögzített $n (\geqq 1)$ egészre.

Ekkor

$$y_{n+1}^2 = (2x_n + 3y_n + 1)^2 = 4x_n^2 + 9y_n^2 + 12x_n y_n + 4x_n + 6y_n + 1.$$

Ez utóbbi kifejezést 2-vel bővítve, majd — indukciós feltevésünket alkalmazva — a $18y_n^2$ helyébe a $16y_n^2+x_n^2+x_n$ kifejezést írva, csoportosítás után

$$y_{n+1}^2=\frac{(9x_n^2+16y_n^2+24x_n y_n+6x_n+8y_n+1)+(3x_n+4y_n+1)}{2}$$

adódik, azaz

$$y_{n+1}^2=\frac{(3x_n+4y_n+1)^2+(3x_n+y_n+1)}{2}=\frac{x_{n+1}^2+x_{n+1}}{2},$$

és ezt kellett bizonyítanunk.

Csorba Ferenc, Győr és Polcz Katalin, Pécs

Megjegyzés: Bencze Mihály, Brassó, Matolcsy Kálmán, Debrecen és Sugár György, Budapest azt is bebizonyították, hogy az (y_n^2) sorozat elemeinek halmaza azonos mindazon tranguláris számok halmazával, melyek egyúttal négyzetszámok is. Ehhez lásd: Sebestyén József: Beszámoló a Tanárképző Főiskolák 1979. évi Országos Matematikai Tanulmányi Versenyéről (A Matematika Tanítása 1980. 1. szám 19—20. oldalát).

A megoldók száma: 19.

923. Jelöljük a kanonikus alakú $z=x+\mathbf{i}y$ komplex szám valós és képzetes részének összegét $B(z)$-vel:

$$B(z)=x+y.$$

Bizonyítsuk be, hogy ha x és y egész szám, k pedig természetes szám, akkor érvényes a

$$B(z)\mid B(z^{4k+1})$$

reláció.

Surányi János, Budapest — Várnai Ferenc, Miskolc

Megoldás: A binomiális tétel alapján:

$$z^{4k+1}=(x+\mathbf{i}y)^{4k+1}=\sum_{t=0}^{\left[\frac{4k+1}{2}\right]}\left(\binom{4k+1}{t}x^{4k+1-t}(\mathbf{i}y)^t+\binom{4k+1}{4k+1-t}x^t(\mathbf{i}y)^{4k+1-t}\right),$$

ahol $\left[\frac{4k+1}{2}\right]$ a $\frac{4k+1}{2}$ egészrészét jelöli. A tagok ilyen csoportosítása lehetséges, páratlan kitevőre a binomiális tételben szereplő tagok száma páros. Felhasználva az ismert $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ azonosságot, előbbi összegünket

$$z^{4k+1}=\sum_{t=0}^{\left[\frac{4k+1}{2}\right]}\left\{\binom{4k+1}{t}x^t\cdot y^t(\mathbf{i}^t x^{4k+1-2t}+\mathbf{i}^{4k+1-t}\cdot y^{4k+1-2t})\right\}$$

alakban is írhatjuk.

Mivel $\mathbf{i}^t\cdot\mathbf{i}^{4k+1-t}=\mathbf{i}$, ezért a bal oldal csakis az $(1, \mathbf{i})$ vagy a $(-1, -\mathbf{i})$ párokbeli elemek szorzata lehet.

Eszerint $B(z^{4k+1})$ olyan tagokból áll, amelyek mindegyike tartalmaz tényezőként olyan kéttagú összeget, melynek mindkét tagja — az előbbi megállapítás miatt — x-nek és y-nak azonos előjelű, ugyanolyan páratlan kitevős hatványa. Mivel két egész szám ilyen kitevőjű hatványának összege osztható a számok összegével, ezért

$$B(z)\mid B(z^{4k+1}).$$

Kozmáné Tegez Rita, Tatabánya és Imolya Sándor, Hódmezővásárhely

A megoldók száma: 26.

924. Egy 45 kőből álló 0, 1, 2, ..., 8 pontos dominókészletből találomra kiválasztunk két követ. Mi a valószínűsége annak, hogy ezeket az ismert játékszabály szerint egymás mellé lehet illeszteni? Mekkora ez a valószínűség, ha egy kő hiányzik a készletből?

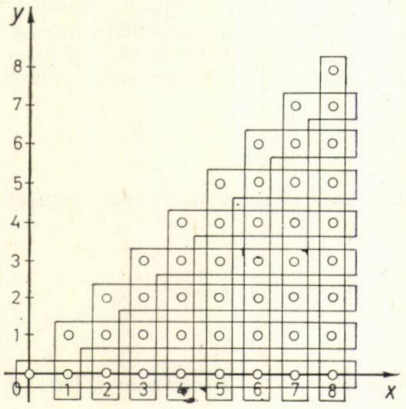
Bakos Tibor, Budapest

Megoldás: Minden $(x; y)$ dominókőnek megfeleltethető egy-egy rácspont, melynek koordinátái x és y $(0\leqq y\leqq x\leqq 8)$.

E rácspontokat 9 halmazba sorolhatjuk. Egy halmaz elemei azok és csak azok a rácspontok, melyeknek pontosan egy koordinátájuk megegyezik. Ily módon mindegyik halmazunk 9 elemű.

Az $(x; x)$ pontok pontosan egy halmazba, a többiek pontosan két halmazba tartoznak (lásd az ábrát). Két kő kihúzása akkor és csak akkor kedvező, ha a két kő ugyanannak a halmaznak eleme.

Ezek előrebocsátásával, *hiánytalan készletből* $\binom{45}{2}$-féleképpen választhatunk két követ. Választásunk akkor kedvező, ha egy halmazból való e két kő. Mivel egy halmazból $\binom{9}{2}$-féleképpen választhatunk, ezért a kilenc halmazból $9\cdot\binom{9}{2}$-féleképpen. Tehát a keresett P_1 valószínűség:



$$P_1 \text{ (a két kő illeszthető)} = \frac{9\cdot\binom{9}{2}}{\binom{45}{2}} = \frac{18}{55} \approx 0{,}3273.$$

Hiányos készlet esetén először határozzuk meg az illeszthetőség P_2, illetve P_3 valószínűségét, a hiányzó kő milyenségének feltétele mellett. Abban az esetben, ha $(x; x)$ kő hiányzik, akkor egy halmazunk 8 elemű, a többi 9 elemű, így a kedvező esetek száma:

$$\binom{8}{2} + 8\cdot\binom{9}{2} = 316,$$

tehát

$$P_2 \text{ (duplakő hiányzik)} = \frac{316}{\binom{44}{2}} = \frac{158}{473} \approx 0{,}3340.$$

Ha egy $(x; y)$ $x \neq y$ kő hiányzik, akkor mivel ez két halmazban is benne volt, ezért két halmazunk 8 elemű, a többi hét pedig 9 elemű. Ekkor a kedvező esetek száma:

$$2\cdot\binom{8}{2} + 7\binom{9}{2} = 14\cdot 22,$$

tehát az illeszthetőség ez esetben

$$P_3 \text{ (nem duplakő hiányzik)} = \frac{14\cdot 22}{\binom{44}{2}} = \frac{14}{43} \approx 0{,}3256 \text{ valószínűségű.}$$

Mivel $(x; x)$ kő hiányának valószínűsége $\frac{9}{45}$, (x, y) kő hiányának valószínűsége pedig $\frac{36}{45}$, ezért a teljes valószínűség tétele miatt

$$P_4 = \frac{1}{5}P_2 + \frac{4}{5}P_3 = \frac{18}{55} = P_1$$

valószínűséggel húzunk két illeszthető követ.

Mindvégig feltettük, hogy bármely két kő kihúzása, illetve bármelyik kő hiánya egyenlően valószínű.

Megjegyzés: Bartha Gábor, Szentendre és Bogdán Zoltán, Cegléd az $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ darab kőből álló 0, 1, 2, ..., n pontos dominókészletre általánosítva oldotta meg a feladatot. Előbbi jelöléseinkkel, a

$$P_1 = \frac{4(n+1)}{(n+2)(n+3)}, \quad P_2 = \frac{4(n^2+2n-1)}{(n+3)(n^2+3n-2)} \quad \text{és} \quad P_3 = \frac{4(n^2+2n-3)}{(n+3)(n^2+3n-2)}$$

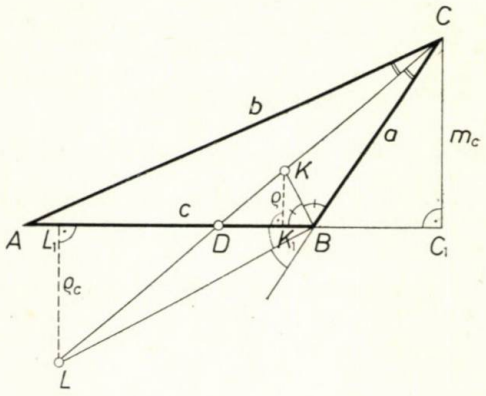
valószínűségeket bizonyították. A $P_1 = P_4$ most is teljesül.

A megoldók száma: 15.

925. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög bármelyik oldalegyenesén a beírt kör érintési pontja, az oldalt érintő hozzáírt kör érintési pontja, a magasságtalppont és a belső szögfelező metszéspontja — amennyiben különböznek egymástól — harmonikus pontnégyest alkotnak!

Fitos László, Nyíregyháza

1. Megoldás:



Tekintsük az ABC háromszög C csúcsához tartozó szögfelező- és magasságegyeneseket! Jelölje ezeknek az AB oldalegyenesen levő pontjait rendre D, illetve C_1. A háromszög beírt, illetve az AB-t érintő hozzáírt kör érintési pontját az AB oldalon K_1, illetve L_1 jelöli az ábra szerint.

A feladat szerinti $(K_1L_1C_1D)$ kettősviszony akkor és csak akkor létezik, ha e négy pont különböző. Ez pedig akkor és csak akkor teljesül, ha $CA \neq CB$. Ekkor a D, C_1 pontpár elválasztja a K_1L_1 pontpárt, mert e pontokban az AB egyenesre merőlegeseket emelve, ezek a C csúcshoz tartozó szögfelezőt rendre a D, C, K, L pontokban metszik. Nyilvánvaló, hogy az utóbbi két pont a beírt, illetve a hozzáírt kör középpontja. K és L pontokat C és D elválasztja, mert K a háromszög belsejéhez, L pedig a háromszög külsejéhez tartozik, míg C és D a háromszög határához. A vetítés elválasztástartó, ezért a $(K_1L_1C_1D)$ negatív.

Definíció szerint:

$$(K_1L_1C_1D) = \frac{(K_1L_1C_1)}{(K_1L_1D)} = \frac{K_1C_1}{C_1L_1} : \frac{K_1D}{DL_1}, \tag{1}$$

ahol a (PQR) osztóviszony a PR, RQ irányított szakaszok előjeles hosszának hányadosa. Ez tehát akkor és csak akkor pozitív, ha R elválasztja a P és Q pontokat, azaz R a PQ szakasz belsejében van.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$CC_1 = m_c,\ KK_1 = \varrho,\ LL_1 = \varrho_c,\ 2s = a+b+c.$$

Ismert a háromszög T területe, s félkerülete és a beírt illetve hozzáírt körök sugarai közötti viszony:

$$\varrho = \frac{T}{s},\quad \varrho_c = \frac{T}{s-c}. \tag{2}$$

Az AB, CD egymást metsző egyeneseket az AB-re merőleges CC_1, KK_1, LL_1 egyenesekkel metszve a párhuzamos szelők tétele, illetve ennek következménye miatt:

$$\frac{K_1C_1}{C_1L_1} = \frac{\varrho - m_c}{\varrho_c + m_c} \quad \text{és} \quad \frac{K_1D}{DL_1} = \frac{\varrho}{\varrho_c}.$$

Felhasználva még a $2T = m_c c$ összefüggést, (1) és (2) miatt

$$(K_1L_1C_1D) = \frac{\frac{T}{s} - \frac{2T}{c}}{\frac{T}{s-c} + \frac{2T}{c}} : \frac{\frac{T}{s}}{\frac{T}{s-c}} = \frac{c-s}{s} : \frac{s-c}{s} = -1,$$

és ezt kellett igazolnunk.

Kondor Judit, Budapest, Szánthó Gyula, Gyula és Vermes Miklós, Budapest

II. megoldás: Előbbi jelöléseinket megtartva, továbbá felhasználva a kettősviszony vetítéssel szembeni invarianciáját, vetítsük a K_1, L_1, C_1, D pontnégyest az AB egyenesre merőleges egyenes ideális pontjából a CD egyenesre. Ekkor

$$(K_1L_1C_1D) = (KLCD). \tag{3}$$

Pappos tétele miatt a $(KLCD)$ kettősviszony megegyezik a B tartópontú K, L, C, D pontokra illeszkedő sugárnégyes kettősviszonyával, tehát

$$(KLCD) = (BK, BL, BC, BD). \tag{4}$$

A BCD háromszögben BK, BL a B csúcshoz tartozó belső, illetve külső szögfelezők, ezért

$$(BK, BL, BC, BD) = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\left(-90^\circ - \frac{\beta}{2}\right)} : \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right)} = -1.$$

Ezt egybevetve (4)-gyel és (3)-mal

$$(K_1 L_1 C_1 D) = -1$$

adódik, s ezt kellett bizonyítani.

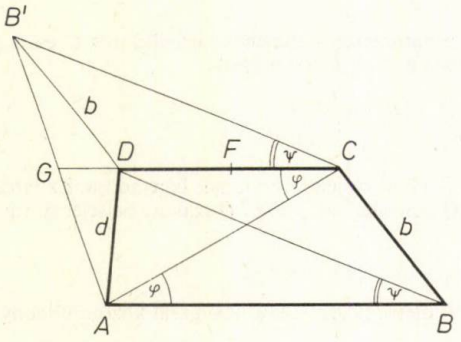
Szabó Zsófia, Békéscsaba

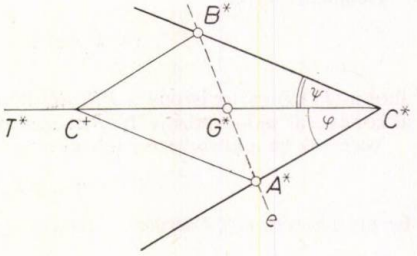
Megjegyzés: Bogdán Zoltán, Cegléd az AK, KB, BL, LA egyenesek adta teljes négyoldal KL átlósegyenesén levő K, L szögpontokra, illetve D, C átlóspontokra alkalmazta a teljes négyoldal tételét: Egy teljes négyoldal átlósegyenesén levő szögpontok és átlóspontok harmonikusan választják el egymást.

A megoldók száma: 24.

926. Szerkesszük meg az $ABCD$ ($AB \| CD$) trapézt, ha adottak a szárai, továbbá a BAC és az ABD szögek!

Deák Tibor, Budapest





Megoldás:

Legyen a CD oldal felezőpontja F! Tükrözzük a BCD háromszöget az F pontra! A háromszög tükörképe a $B'DC$ háromszög (l. ábrát). A $BAC\sphericalangle = ACD\sphericalangle = \varphi$, mert váltószögek, az $ABD\sphericalangle = DCB'\sphericalangle = \psi$, mert egyállású szögek.

A CD egyenes felezi az AB' szakaszt, mert A és B' távolsága a CD egyenestől ugyanakkora, mint a trapéz magassága. Az AB' szakasz felezőpontját jelölje G.

Az ACB' háromszöghöz hasonló háromszög szerkeszthető:

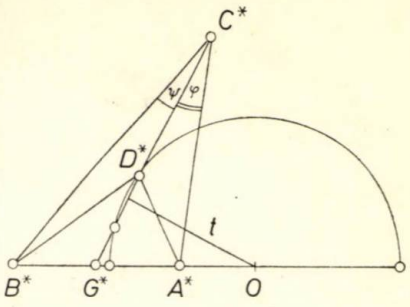
1. C^*T^* félegyenes C^* kezdőpontjában, a félegyenes két partján felmérjük az adott φ illetve ψ szögeket úgy, hogy egyik száruk a C^*T^* félegyenes legyen.
2. A C^*T^* félegyenes egy tetszőleges C^*-tól különböző G^* pontjában megszerkesztjük azt a G^*-ra illeszkedő e egyenest, amelynek a $\varphi+\psi$ szög szárai közé eső szakaszát G^* felezi (l. ábrát). Ilyen e egyenes egyetlenegy van, hiszen átlója kell legyen annak a paralelogrammának, melynek másik átlója a C^*C^+, ahol C^+ a C^*-nak G^*-ra vonatkozó tükörképe.
   Az e egyenes a szög szárait az A^*, B^* pontokban metszi. Az $A^*C^*B^*$ háromszög nyilvánvalóan hasonló az ACB' háromszöghöz.
   Az a hasonlóság, mely az előbbi két háromszöget egymáshoz rendeli, az ACB' háromszög CG súlyvonalán levő D ponthoz azt a D^* pontot rendeli, mely az $A^*C^*B^*$ háromszög C^*G^* súlyvonalán van és

$$D^*A^* : D^*B^* = DA : DB' = \frac{d}{b}.$$

3. Ezek szerint D^* rajta van az A^*, B^* pontokhoz tartozó d arány adta Appoloniosz-körön.
   Az így nyert A^*, B^*, C^*, D^* pontnégyesből már megszerkeszthető az $ABCD$ trapéz.

4. C^* közepű $\frac{b}{D^*B^*}=\frac{d}{D^*A^*}=\mu$ arányú hasonlóság az $A^*B^*C^*D^*$ négyszöget az $AB'CD$ négyszöggel egybevágó négyszögbe viszi, melynek DB' és DA oldalai b illetve d hosszúságúak, továbbá $B'CD\sphericalangle=\psi$ és $ACD\sphericalangle=\varphi$.

5. Ha az $AB'CD$ négyszög CD oldalának F felezőpontjára tükrözzük a CDB' háromszöget, akkor a B' pont B tükörképével nyert $ABCD$ négyszög rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal. Ugyanis az ACB' háromszög CD súlyvonalától B' ugyanolyan távol van, mint A, ezért a B' pont F-re vonatkozó B tükörképének CD-től való távolsága is ekkora, tehát $AB\|CD$. A szerkesztésből pedig nyilvánvaló, hogy $BC=b$ és $AD=d$, továbbá $CAB\sphericalangle=\varphi$ és $ABD\sphericalangle=\psi$.



Az eddigiekben feltettük, hogy az adott adatokból kiindulva valamennyi szerkesztési lépésünk egy-egy új, eddig hiányzó pont, illetve alakzathoz vezet, másszóval a *szerkesztés feltételei* teljesülnek. Ezeket vizsgálva megállapíthatjuk, hogy a **2**-beli szerkesztés akkor és csak akkor vezet a szárakat metsző e egyeneshez, ha a szögtartomány konvex, azaz

$$0<\varphi+\psi<\pi. \tag{1}$$

Ebből az is következik, hogy φ és ψ közül legalább az egyik hegyesszög kell legyen. Nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy $\psi<\frac{\pi}{2}$ és $\psi\leqq\varphi$.

A **3.** szerint szerkesztett Appoloniosz-kör akkor és csak akkor létezik, ha $b\neq d$. Feltehetjük, hogy $d<b$. Az Appoloniosz-körnek a C^*G^* egyenessel akkor és csak akkor van közös D^* pontja, ha a kör O középpontjának az egyenestől való t távolsága legfeljebb sugárnyi.

Ismeretes (például koordinátageometriai számolásból), hogy a kör O középpontjának távolsága az A^*B^* szakasz felezőpontjától $OG^*=\frac{\lambda^2+1}{1-\lambda^2}A^*G^*$, és a kör sugara $\frac{2A^*G^*\lambda}{1-\lambda^2}$, ahol $\lambda=\frac{d}{b}(<1)$. Ha a **2**-beli G^* pontot úgy választjuk meg, hogy $A^*G^*=G^*B^*=1$ legyen, akkor sinus-tételek ismételt alkalmazásával — a $C^*G^*A^*\sphericalangle=\delta$ jelölés mellett —

$$\operatorname{tg}\delta\cdot\sin(\varphi-\psi)=2\sin\varphi\cdot\sin\psi \tag{1'}$$

adódik. $\delta=90°$ akkor és csak akkor, ha $\varphi=\psi$, ekkor azonban $b=d$ kell legyen, különben a feladatnak nincs megoldása. Feltehető tehát a továbbiakban, hogy $\varphi>\psi$ és így $\vartheta<90°$. Ezekből

$$t=\frac{\lambda^2+1}{1-\lambda^2}\sin\delta\leqq\frac{2\lambda}{1-\lambda^2}=r \tag{1''}$$

kell legyen.

Az (1′) — és (1″)-ből, felhasználva a szögfüggvényekre vonatkozó Pitagoraszi összefüggéseket is:

$$\sin\delta=\frac{2}{\sqrt{(\operatorname{ctg}\psi-\operatorname{ctg}\varphi)^2+4}}\leqq\frac{2\lambda}{\lambda^2+1},$$

amiből

$$\frac{b}{d}-\frac{d}{b}\leqq\operatorname{ctg}\psi-\operatorname{ctg}\varphi \tag{2}$$

annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $d<b$ és $\psi<\varphi$ feltételek mellett az Appoloniosz-körnek legyen C^*G^* egyenessel közös D^* pontja.

A $b=d$ esetben C^*G^*, mint láttuk, felezi A^*B^* szakaszt, ezért ekkor mindig van megoldás, mégpedig $\varphi=\psi$ esetén végtelen sok (a C^*G^* félegyenes minden C^*-tól különböző D^* pontja megfelel), $\varphi\neq\psi$ esetben pedig csak egy.

Összefoglalva: A szerkeszthetőség feltétele: (1) mellett a $d<b$ és $\psi<\varphi$ esetén még a (2) is, amikor is a megoldások száma egy vagy kettő aszerint, hogy (2)-ben az egyenlőség áll, vagy sem. Ha $d=b$, akkor egyetlenegy vagy végtelen sok megoldás van aszerint, hogy $\varphi\neq\psi$, vagy $\varphi=\psi$. Minden más esetben nincs megoldás.

Megjegyzés: Az e feladatra küldött „megoldások" egy része némi analízis mellett, csupán a szerkesztési lépések megadására szorítkozott, holott egy szerkesztési feladat megoldásához a fentieken

kívül még hozzátartozik annak *bizonyítása* is, hogy a megadott szerkesztéssel nyert alakzat a kívánt tulajdonságú. Ezenkívül vizsgálni kell a *szerkesztés feltételeit* is, mert enélkül a bizonyítás sem lehet helyes. Illik továbbá még megadni — az előbbiek birtokában — a megoldások számát is.
A megoldók száma: 7.

A megoldók névsora (921—926.)

Bagi Gábor, Barcs (921., 922.); Balogh Imre, Pápa (921., 922.); Bartha Gábor, Szentendre (921—926.); Bencze Mihály, Brassó (921—923.); Bíró Béla, Barót (921—923.); Bogdán Zoltán, Cegléd (921—923., 924—926. két-két mód); Boldoczki Sándorné, Siófok (921., 924.); Csányi Péter, Nagykőrös (921.); Csorba Ferenc, Győr (921—923.); Dániel Gyula, Vác (921., 923.); Deák Imre, Székelyudvarhely (921., 923. két mód, 925.); Filetóth István, Nyíregyháza (921., 926.); Gaál László, Valkó (921—925.); Hárspatakiné Dékány Veronika, Budapest (921., 925.); Heverdle István, Eger (921.); Horváth Géza, Želiezovce (921., 925.); Ihász László, Nagybajom (921. két mód, 922—926.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (921. két mód, 922—924., 925. két mód); Kacsó Ferenc, Marosvásárhely (921. két mód, 922., 923. két mód, 924., 925. két mód, 926); Kamarás Lajos, Pécs (921. két mód, 922., 923., 924. három mód, 925. két mód, 926.); Kishalmi Róza, Hódmezővásárhely (921.); Kiss Andrea, Szombathely (921. két mód, 923—925.); Kiss Margit, Pécel (921.); Kondor Judit Budapest (925.); Kovácsné Gajdács Ibolya, Érd (921., 925); Kozmáné Tegez Rita, Tatabánya (921., 923—925.); Kun Péter, Szentendre (921—925.); Dr. Major Pál, Budapest (921., 923., 925.); Matolcsy Kálmán, Debrecen (921., 922. két mód, 923., 924.); Mészáros József, Galánta (921—923., 925.); Molnár József, Szombathely (921., 923.); Nagy Ferenc, Hajdúböszörmény (921.); Nyírő László, Mezőkövesd (923., 924.); Pletka Katalin, Mezőkovácsháza (921.); Polcz Katalin, Pécs (921—925.); Schutzbach Mártonné, Siófok (925); Sebestyén László, Budapest (921.); Simon Béla, Nyíregyháza (921.); Sugár György, Budapest (921., 922. két mód, 923., 925.); Szabó Zsófia, Békéscsaba (921., 923., 925., 926.); Szánthó Gyula, Gyula (921—926.); Téglás Zsuzsanna, Kalocsa (921.); Tuzson Zoltán, Marosvásárhely (921—923.); Vermes Miklós, Budapest (921., 925.); Vigassy Lajos, Budapest (925. két mód, 926.); Zalán Péterné, Budapest (921., 922., 924., 925.)

Javasolt szakirodalom
a Tankönyvkiadó kiadványai közül

	Fűzve
Dr. Kőhegyiné—Vajda: *Egyéni matematikatanulás osztályközösségben.* Feladatgyűjtemény tanárok számára az általános iskola 8. osztályának matematikaoktatásához (52 681)	16,—
Hámori: *Ismerkedés a komputerrel.* Számítástechnika I. az általános és középiskolai tanulók számára (29 205)	10,—
Kovács Gy.: *Számítógépek technikája.* Számítástechnika III. (29 217)	15,50
Élő matematika 1. Tanulmányok. Szerkesztő: Gádor Endréné (92 347/1)	18,—
Jánossy—Tasnádi: *Élő matematika 2. Valószínűségszámítás* (92 347/2)	6,—
Gergely—Hódi és mások: *Élő matematika 3. A lánctörtektől a számítógépig* (92 347/3)	13,—
Korányi: *Élő matematika 4. Használjuk a differenciálszámítást!* (92 347/4)	18,50
Kovács M.: *Néhány kibernetikai játékgép.* Bevezetés az automaták tervezésébe (29 184)	11,50
Ligeti—Mosoni: *Törd a fejed, érdemes!* Matematikai feladatgyűjtemény az általános iskolai tanulók számára (1908/1)	10,—
Felvételi feladatok: matematika, fizika, szabadkézi rajz. Szerkesztette: Pálfai Pál (8159).	108,—
Péter Rózsa: *Játék a végtelennel. Matematika kívülállóknak* (52 489)	31,—
Vigassy L.: *Egybevágósági transzformációk a síkban és a térben* (29 247)	9,50

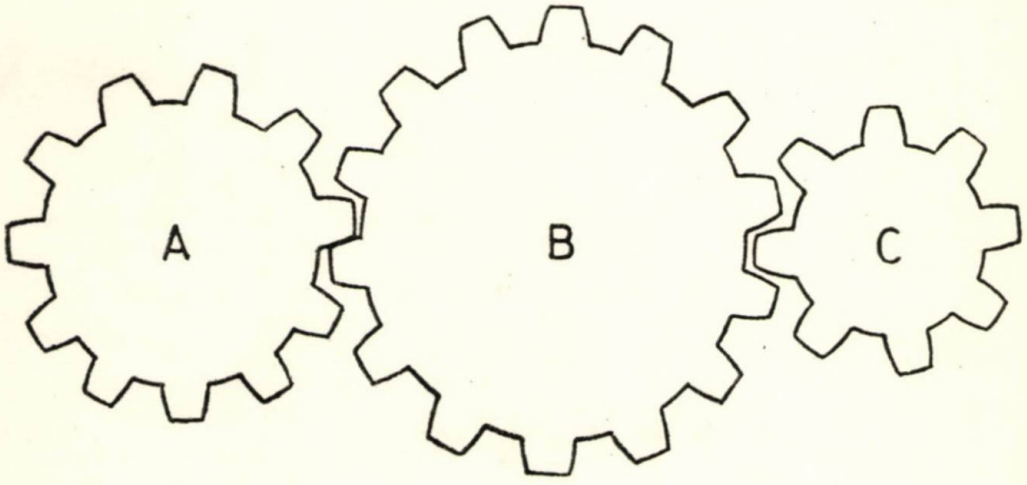
Beszerezhetők
a 17. Pedagógus-könyvesboltban (1053 Bp., Múzeum krt. 3.),
a 44. Könyvesboltban (1052 Bp., Deák F. u. 15.)

INDEX: 25 565

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata

VERSEGHY KÖNYVTÁR SZOMBATHELY



1980. október * XXVII. évfolyam 5 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS LÁSZLÓ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PALMAY LORÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, REMÉNYI GUSZTÁV, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200.
80-3602 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím; Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 27,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 4,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére. A papirlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely. Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Katz Sándor: A bizonyítási készség fejlesztése függvénytani feladatok segítségével 129
Dr. Rédling Elemér: A deduktív gondolkodásmód fejlesztéséről 133
Bencze Mihály: Néhány sor alkalmazása a számelméletben 138
Hódi Endre: Magyar tanulók részvétele a 31. Évenkénti Középiskolai Matematikai Versenyvizsgán 142
Hódi Endre: Rövid beszámoló a finnországi nemzetközi matematikai tanulmányi versenyről 148
Dr. Korányi Erzsébet: Felelet a „Kételyek és aggályok"-ra 151
Bereznai Gyula—Dr. Varecza Árpád: Megjegyzés egy versenyfeladathoz 155
Dr. Scharnitzky Viktor: Matematikus vándorgyűlés Salgótarjánban 159

FELADATOK ..... III.

СОДЕРЖАНИЕ

Кац Шандор: Развитие навыка доказательства с помощью задач по теории функции 129
Д-р Редлинг Элемер: О развитии дедуктивного мышления 133
Бенце Михай: Применение нескольких рядов в теории чисел 138
Ходи Эндре: Участие венгерских учеников на 31. Ежегодном математическом конкурсном экзамене для средних школ 142
Ходи Эндре: Короткий отчёт о международном математическом учебном соревновании 148
Д-р Корани Эржебет: Ответ на статью «Сомнения и опасения» 151
Березнаи Дюла—д-р Вареца Арпад: Замечание к одной из конкурсных задач .. 155
Д-р Шарницки Виктор: Выездная сессия математиков в г. Шалготарян..... 159

ЗАДАЧИ ..... III.

INHALT

Katz, Sándor: Die Entwicklung der Beweisfertigkeit durch Aufgaben aus der Funktionenlehre 129
Dr. Rédling, Elemér: Über die Entwicklung der deduktiven Denkweise 133
Bencze, Mihály: Die Anwendung einiger Reihen in der Zahlentheorie 138
Hódi, Endre: Die Teilnahme ungarischer Schüler am 31-sten Jährlichen Mathematischen Examen der Mittelschulen 142
Hódi, Endre: Kurzbericht über den finnländischen internationalen mathematischen Wettbewerb 148
Dr. Korányi, Erzsébet: Antwort auf die „Zweifel und Besorgnisse" 151
Bereznai, Gyula—Dr. Varecza, Árpád: Bemerkung zu einer Wettbewerbsaufgebe . 155
Dr. Scharnitzky, Viktor: Wanderversammlung der Mathematiklehrer in Salgótarján 159

AUFGABEN ..... III.

KATZ SÁNDOR
középiskolai tanár
Bonyhád

A bizonyítási készség fejlesztése függvénytani feladatok segítségével

Köztudott, hogy a középiskolai matematikatanítás egyik legnehezebb feladata a bizonyítási készség kialakítása. A tanulók általában idegenkednek a bizonyítási feladatoktól. Nehezen különböztetik meg a feltételt az állítástól, problémát okoz a „bármely" és „van olyan" kvantorok használata, indirekt bizonyításokban az állítás tagadása. A legegyszerűbb bizonyítási feladatokban is gyakori probléma az, hogy a tanulók nem tudják milyen bizonyítási módot alkalmazzanak, mikor elegendő egyetlen példát adni, mikor nem bizonyít a példa, még sok példa sem.

Mindez nem meglepő, hiszen a tanulók nagyon kevés bizonyítási feladattal találkoznak általános iskolai matematikatanulmányaik folyamán. A többi természettudományos tárgyban pedig sokszor néhány tapasztalat alapján általános érvényű törvényeket fogalmaznak meg. Ezért matematikaórán is néhány kísérletet, próbálgatást bizonyító érvényűnek fogadnak el.

A bizonyítási készség fejlesztésének első lépése a bizonyítási igény kialakítása a tanulókban. A próbálgatások általában csak sejtést adhatnak. Ez nagyon fontos része a feladat megoldásának, de a teljes megoldáshoz a megfogalmazott állítások igazolására is szükség van. Ahhoz, hogy ezt a tanulók is természetesnek találják és gyakorlatra tegyenek szert a megfelelő bizonyítási mód kiválasztásában, alkalmazásában, az egyszerűbbtől a nehezebbekig nagyon sok bizonyítási feladatot kell megoldatnunk velük.

A továbbiakban azokból a függvénytannal kapcsolatos feladatokból szeretnék bemutatni néhányat, amelyek segítségével a tanulók bizonyítási készségét próbáltam kialakítani, fejleszteni. Mivel a függvénytan nagyon szemléletes, a tanulók könnyen megsejthetik a helyes választ és a bizonyítások többségét — kis segítséggel — akár első osztályban is el tudják végezni.

I.

1. feladat

Lehet-e egy mindenütt értelmezett, szigorúan monoton növekvő függvény a) páros; b) páratlan?

Az *a)* kérdésre némi próbálkozás után nemleges választ adtak a tanulók. Azt próbáltam megértetni velük, hogy ha az osztályban senki sem talál olyan függvényt, amely páros és szigorúan monoton növekvő, még nem jelenti biztosan azt, hogy nincs is ilyen függvény. Hátha másvalaki meg tudna adni ilyen függvényt. Csak sejtjük, hogy nincs ilyen függvény. Igazolni is kell, hogy ilyen nem létezik! Hogyan? Ha azt akarjuk igazolni, hogy valami nem létezik, akkor kézenfekvő az indirekt bizonyítási mód.

Tegyük fel, hogy az f függvény szigorúan monoton növekvő, azaz bármely $x_1<x_2$ esetén $f(x_1)<f(x_2)$; és hogy a függvény páros, azaz bármely x_0 esetén $f(x_0)=f(-x_0)$. Ha azonban $x_0>0$, akkor $-x_0<x_0$, ezért a szigorúan monoton növekedés miatt $f(-x_0)<f(x_0)$. Ez ellentmond annak a feltevésnek, hogy a függvény páros. Tehát a feltevés hibás volt; valóban nem létezik mindenütt szigorúan monoton növekvő, páros függvény.

A *b)* kérdésre igenlő a válasz: elég megadni hozzá egyetlen megfelelő függvényt, pl. az f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=x$ szigorúan monoton növekvő, páratlan függvény. (Ebben a feladatban is és a továbbiakban is az [1]-ben található definíciókat használtam, itt egy helyen megtalálható az összes definíció, amely a középiskolás függvénytanban szükséges.)

2. feladat

Létezik-e olyan, mindenütt értelmezett, pozitív értékű függvény, amely a) páros; b) páratlan?

Ezt a feladatot első osztályban, dolgozatban adtam fel. Az egyik tanuló válasza a következő volt:

a) Igen; pl. f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=x^2+1$.

b) Nem; mert ha f páratlan, akkor $f(0)=0$.

Egyszerű, szép megoldás, további részletezésre nincs is szükség.

3. feladat

Lehet-e egy páros, illetve páratlan függvénynek pontosan egy szélsőértéke?

a) Párosnak igen; pl. az f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=x^2$ függvénynek csak az $x=0$ helyen van szélsőértéke.

b) Páratlannak nem. Tegyük fel, hogy f páratlan és egy x_0 helyen szélsőértéke, például minimuma van. Ekkor x_0-nak van olyan környezete, amelyből választott bármely x-re $f(x)>f(x_0)$. Ha $x_0 \neq 0$, akkor $-f(-x)=f(x)>f(x_0)=-f(-x_0)$. (-1)-gyel szorozva azt kapjuk, hogy $-x_0$ környezetéből választott $-x$ értékekre $f(-x)<f(-x_0)$. Tehát a $-x_0$ helyen a függvénynek maximuma van, azaz x_0 helyen kívül még egy másikon ($-x_0$ helyen) is van szélsőértéke.

Ha $x_0=0$, akkor mivel a függvény páratlan, ezért $f(0)=0$. Ha itt a függvénynek minimuma van, akkor az origónak van olyan δ sugarú környezete, amelyből választott bármely x-re $f(x)>0$. Tehát ha $|x|<\delta$, akkor $f(x)$ és $f(-x)$ is pozitív. De ha a függvény páratlan, akkor $f(x)=-f(-x)$, és ez ellentmondás.

4. feladat

a) Igaz-e, hogy minden szigorúan monoton függvény kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés?

b) Igaz-e, hogy minden kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés szigorúan monoton függvényt határoz meg?

Az *a)* kérdésre a válasz: Igaz. Hiszen, ha egy függvény szigorúan monoton (például növekvő), akkor az értelmezési tartományból választott bármely $x_1<x_2$ esetén $f(x_1)<f(x_2)$. Tehát a független változó különböző értékeihez különböző függvényértékek tartoznak, azaz a függvény kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés.

A *b)* kérdésre a válasz: Nem igaz. Könnyen megadhatunk olyan nem folytonos függvényt, amely kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés, de nem szigorúan monoton. Például a következő három számpárral megadott függvény: $(0 \to 0)$, $(1 \to 2)$, $(2 \to 1)$; de megadhatunk mindenütt értelmezett függvényt is, pl.

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x)=\begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ racionális;} \\ -x, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

5. feladat

Igaz-e, hogy ha egy függvény bármely x hellyel együtt a $-x$ helyen is értelmezve van, és kifejezésében a független változó

a) csak páros kitevővel fordul elő $\left(\text{pl. } f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{x^4}{1+x^2}\right)$, *akkor a függvény páros;*

b) csak páratlan kitevővel szerepel (pl. f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=x^3+x$), *akkor a függvény páratlan?*

Az *a)* állítás igaz, mert ha x csak páros kitevővel szerepel, akkor a függvény értéke az x és $-x$ helyen megegyezik, tehát a függvény páros.

Páratlan kitevők esetén a *b)* állítás nem igaz, mert bár van olyan függvény, amelyikre igaz az állítás (a fenti példában is), de nem minden, adott tulajdonságú függvény páratlan. Az állítás cáfolására elég megadni egyetlen ellenpéldát. Például az f: $(-\infty, 0) \cup (0; \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x)=$

$= \frac{x^5+x^3}{x}$ függvény nem páratlan.

Ezek után a feladatok után a tanulók maguk is meg tudták fogalmazni: ha azt akarjuk igazolni, hogy *van olyan* függvény, amely rendelkezik egy adott tulajdonsággal, akkor *elég* megadni *egyetlen példát*. Ha viszont azt akarjuk igazolni, hogy egy függvénycsoport *minden* elemére jellemző valamilyen tulajdonság, akkor *nem bizonyít a példa*; *az állítás cáfolására* viszont *elég egyetlen ellenpélda* (**4.** *b)*; **5.** *b)*).

A következő két feladat kissé más jellegű, mint az előzők, de mindkettőt igen hasznosnak találtam, és a tanulóknak is nagyon tetszett.

6. feladat

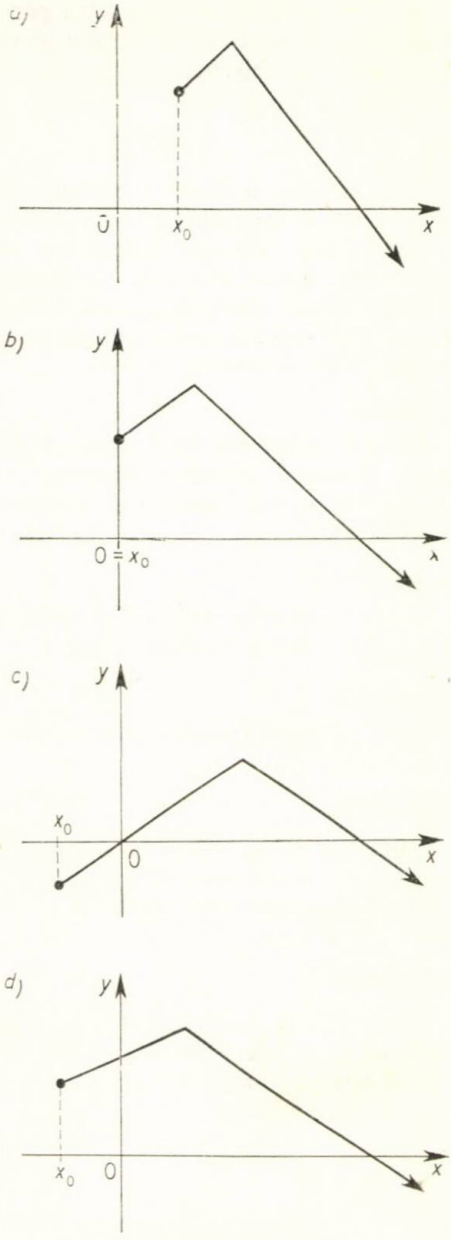
Igaz-e a következő állítás? Az f: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(n)=n^2+n+41$ *függvény értékei minden n természetes számra prímszámok.*

Ez a feladat nagyon sokat segített a bizonyítási igény kialakításában. A tanulók (mivel nem ismerték azt a tételt, hogy nincs olyan, legalább elsőfokú polinom függvény, amelynek minden egész helyen prímszám a helyettesítési értéke) próbálgatás alapján igaznak találták az állítást. Ez nem meglepő, hiszen az első 39 természetes számra valóban prímszám a polinomfüggvény helyettesítési értéke; de már $f(40)=41^2$, tehát nem prím. A próbálgatással kapott sejtés hamisnak bizonyult. Ezután a tanulók is könnyebben elfogadták a bizonyítások szükségességét.

7. feladat

Folytassuk a függvény grafikonját az x_0 ponttól balra úgy, hogy az egy mindenütt értelmezett páros (páratlan) függvény grafikonja legyen!

A tanulók hamar megállapították, hogy a *b)*-t páratlan, a *c)*-t páros, a *d)*-t sem páros, sem páratlan függvény grafikonjaként nem lehet folytatni. A tanulók ugyan legtöbbször elfeledkeznek róla, de az ilyen állításokat is igazolni kell.



Valóban a *b)* és *d)* grafikont nem folytathatjuk úgy, hogy páratlan függvény képe legyen, mert ha egy páratlan függvény az $x=0$ helyen értelmezve van, akkor $f(0)=0$. Márpedig ez a *b)* és *d)* grafikonokon nem teljesül.

A *c)* és *d)* grafikont nem lehet páros függvény képeként folytatni, mert mindkét grafikonon felvehető olyan x és $-x$ pár, hogy $f(x) \neq f(-x)$.

II.

Még néhány, a fentihez hasonló feladatot írok le megoldás nélkül, amelyek a bizonyítási készség fejlesztésén túl harmadik, illetve negyedik osztályban a függvénytani ismeretek összefoglalásakor is sokat segítettek a függvények minél sokoldalúbb megismertetésében.

8. feladat

Lehet-e mindenütt értelmezett, szigorúan monoton növekvő függvény *a)* mindenütt negatív értékű; *b)* korlátos; *c)* periodikus?

9. feladat

Lehet-e páros (páratlan) függvénynek pontosan 2, illetve 3 szélsőértéke?

10. feladat

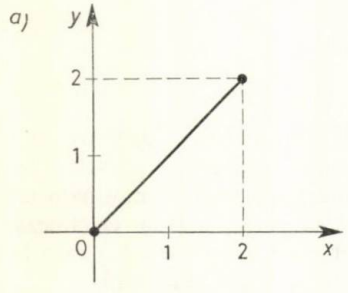
Van-e olyan függvény, amely páros is, páratlan is?

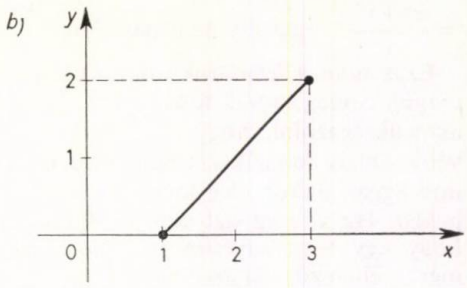
11. feladat

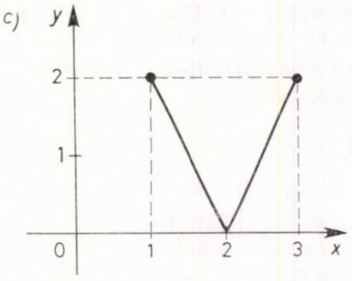
Mutassuk meg, hogy ha egy páros (páratlan) függvénynek létezik differenciálhányados függvénye, akkor az páratlan (páros)!

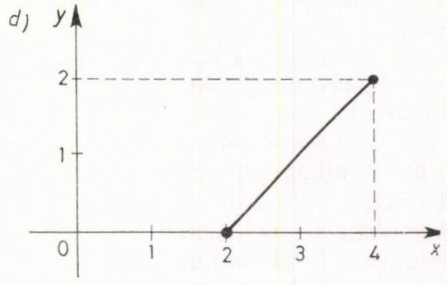
12. feladat

Folytassuk a grafikonokat úgy, hogy azok mindenütt értelmezett, páros, periodikus, $p=4$ periódusú függvények grafikonjai legyenek!









13. feladat

Terjesszük ki az alábbi függvényeket úgy, hogy azok mindenütt értelmezett páros (páratlan) függvények legyenek!

a) $f\colon [1; \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x)=|x-2|$;

b) $f\colon [0; \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x)=|x-2|$;

c) $f\colon (0; \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x)=|x-2|$;

d) $f\colon [-1; \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x)=|x-2|$;

e) $f\colon [-1; \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x)=|x-2|-2$.

IRODALOM

[1] *Rábai Imre:* Elemi matematikai példatár IV. Gondolat Kiadó, Budapest, 1979.
[2] *Gelfand—Glagoljeva—Kirillov—Snol:* A koordináta-módszer. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.
[3] *Dorofeev—Rozov:* Periodikus és nemperiodikus függvények. 43—48. oldal. Kvant, 1977. 1. szám
[4] *Zemljakov:* Páros és páratlan függvények. 38—43. oldal. Kvant, 1977. 4. szám.

DR. RÉDLING ELEMÉR
főiskolai docens
KKVMF, Székesfehérvár

A deduktív gondolkodásmód fejlesztéséről

A [10] alatt említésre kerülő cikkemben egy olyan *szintrendszert* mutattam be, amellyel mérni tudjuk a tanulók geometriai gondolkodásmódjának fejlődését. Öt *szintből* (lépcsőfokból) áll, amelyek a szemlélet fejlődésének *lényeges* jegyeit emelik ki. Egy ilyen szintrendszer ismerete most különösen hasznos, hiszen *új* tanterv kerül bevezetésre. A továbbiakban támaszkodni fogok a [10]-ben elmondottakra.

Megemlítettem, hogy a középiskolában a **IV.**-nek említett szint (megközelítő) elérését tartjuk fontosnak. Ezt a szintet a deduktív (de még nem a szigorú értelemben vett axiomatikus) felépítés jellemzi. A szintet két *fokozatra* (fázisra) osztjuk: az *első fokozatban* a tanulók egy-egy kisebb témakör logikai rendszerezésével a *„kicsiben tekintett dedukciót"* sajátíthatják el, a *másodikban* viszont már felfogják a *dedukciónak* mint az *egész geometria* felépítését szolgáló módszernek a lényegét.

A geometriában a *„lokális dedukció"* jelentőségét elsősorban az *egybevágósági transzformációk*, a *dedukció általánosabb* értelmét pedig a *hasonlóság* témaköre kapcsán közelíthetjük meg legjobban. Az elért eredményeket azután az érettségi vizsgák előtti időszakban lehet kikristályosítani s megszilárdítani.

Alakzatok tulajdonságainak logikai rendszerezése

Megfigyeléseink szerint a középiskola I. osztályába járó tanulók — kezdetben tanári irányítással, de később már önállóan is — képesek a matematika kisebb kérdésköreinek logikai rendszerezésére, azaz elsajátíthatják a geometriai gondolkodás **IV. szintje** *első fokozatának* követelményeit.

A tapasztalatok szerint megtanulhatják azt, hogy hogyan lehet egy-egy kisebb témakört *különböző* módon felépíteni, azaz a tananyagot *más-más feltételből* kiindulva *rendszerezni*. „Felfedezhetik" tehát a tárgyalásra kerülő témakör *belső kapcsolatait*. Így nem csupán elsajátítják — egy előre meghatározott séma szerint haladva — a tananyagot, hanem a *kapcsolatok* felkutatásával és rendszerezésével *matematikai tevékenységet* végezhetnek: vagyis nemcsak megtanulják a közölt definíciót s az arra épülő tételek egy *adott* rendszerét, hanem maguk is részt vesznek a definíció megformálásában, s a tananyag *különböző* rendszereinek megalkotásában. Ezáltal felfogják a *definíció értelmét* és jelentőségét is. Mindez jól fejleszti a tanulók geometriai szemléletét. (A tananyag hagyományos feldolgozásában ilyen jellegű tárgyalásmóddal alig találkozhatunk.)

A lokális rendszerezés gyakorlására kezdetben főképpen a különböző *alakzatok* (az egyenlő szárú háromszög, a szimmetrikus trapéz stb.) tulajdonságainak vizsgálatai nyújtanak jó lehetőséget. A mondottakat most a paralelogrammával kapcsolatos ismeretkör egy lehetséges feldolgozásával illusztráljuk.

A paralelogramma a középpontos tükrözés témaköréhez tartozó anyagrész, így tanítása során már építhetünk a transzformáció alapvető tulajdonságainak ismeretére. A paralelogramma tulajdonságait például a következő módon tárgyalhatjuk.

1. Készítsük el egy „paralelogramma" ábráját (*ne* kérdezzük most a definíciót!), s a tanulók gyűjtsék össze a szóban forgó négyszög néhány *feltételezhető* tulajdonságát! Emeljük ki, s írjuk le ezek közül pl. a következőket — mondjuk az alábbi sorrendben:

T_1: Két-két szemközti oldala párhuzamos.
T_2: Van szimmetriacentruma.
T_3: Két-két szemközti oldala egyenlő.
T_4: Átlói felezik egymást.
T_5: Két-két szemközti szöge egyenlő.
T_6: Bármely két szomszédos szögének összege 180°.

A tanulók feltehetően észreveszik (vagy megsejtetjük velük), hogy ezek a tulajdonságok *nem függetlenek* egymástól.

Megjegyezzük, hogy az ábrának csak a felsorolt (és feltételezett) tulajdonságok *összegyűjtésében* van szerepe, hiszen az ábra semmilyen idomot nem definiál. Így nem vizsgáljuk azt a kérdést sem, hogy helyesek-e az állításaink. Most csak a felsorolt tulajdonságok között fennálló *logikai kapcsolatokkal* foglalkozunk. Igazolni fogjuk, hogy *ha* egy négyszögre a fenti tulajdonságok közül bármelyik is fennáll, *akkor* a többi már levezethető. (Négyszögön most mindig síknégyszöget értünk.)

2. Igazoljuk, hogy *ha* egy négyszög T_1 tulajdonságú, *akkor* érvényes rá a többi tulajdonság is! (A bizonyítást itt nem részletezzük.)

Készítsük el a *bizonyítás sémáját is*! Ez a következő lehet:

$$T_1 \Rightarrow \begin{cases} T_2 \\ T_6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{cases},$$

ebből pedig már látható, hogy

$$T_1 \Rightarrow \begin{cases} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{cases}.$$

3. A tanulók most már egyéni munkával azt is igazolhatják, hogy a T_2 tulajdonságból is következik a többi tulajdonság. Azt kell csupán megmutatni, hogy

$$T_2 \Rightarrow T_1$$

(ez pedig a középpontos tükrözés tulajdonságainak következménye). Előbbi eredményünk alapján már látható, hogy

$$T_2 \Rightarrow \begin{cases} T_1 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{cases}.$$

4. A tanulók azt is észrevehetik, hogy

$$T_4 \Rightarrow T_2,$$

vagyis

$$T_4 \Rightarrow \begin{cases} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_5 \\ T_6 \end{cases}.$$

Megjegyezzük, hogy a bizonyítások most bemutatott sémáit azért célszerű elkészíteni, mert ezek a tanulók számára jól szemléltetik a szóban forgó tulajdonságok szoros kapcsolatát. A szemléltető ábrák a fenti kapcsolatok emlékezetben tartását is elősegítik.

5. Könnyű azt is belátni, hogy

$$T_6 \Rightarrow T_1,$$

illetőleg

$$T_5 \Rightarrow T_6.$$

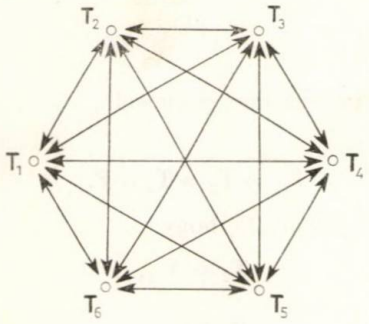
Így tehát a T_6, illetőleg a T_5 tulajdonságú négyszögekre is fennáll a többi tulajdonság.

Utalhatunk még arra is, hogy a T_3 tulajdonságból is következik a többi tulajdonság. (Az állítás helyessége a háromszögek egybevágóságának tárgyalása kapcsán mutatható meg.)

6. Látható már, hogy négyszögek esetén a fenti kijelentések *egyenértékűek*. A közöttük fennálló összefüggés tehát a következő:

$$T_1 \Leftrightarrow T_2 \Leftrightarrow T_3 \Leftrightarrow T_4 \Leftrightarrow T_5 \Leftrightarrow T_6.$$

Ezt a kapcsolatot az 1. ábra segítségével szemléltetni is lehet. Az ábrán az összefüggések „irányát" is feltüntettük.

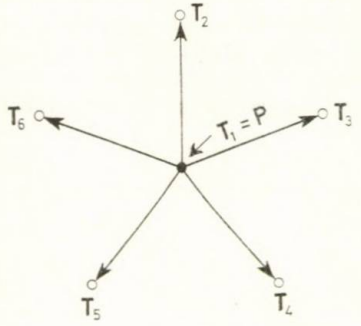


1. ábra

Látható, hogy a felsorolt tulajdonságok a síknégyszögek *egyazon* típusára jellemzők. Az ilyen négyszöget *paralelogrammának* nevezzük.

Kérjünk most ötletet a definícióra! A témakörrel kapcsolatos kísérletek tapasztalatai azt mutatják, hogy kérdésünkből többnyire vita támad. Ezt pszichológiailag jól kihasználhatjuk, mert rádöbbenthetjük a tanulókat arra, hogy a paralelogrammát a felsorolt tulajdonságok *bármelyikével* definiálni lehet. Más témakörökön való gyakorlással azután azt is megvilágíthatjuk, hogy **mit** is **jelent valamely fogalmat definiálni**. Szokás dolga csak, hogy a paralelogrammát a T_1 tulajdonsággal definiálják. (Ebben bizonyos fokú önkényesség is tükröződik, bár ez a tulajdonság áll összhangban a *paralel* szóval.) Mi is *ezt a* **definíciót** fogadjuk el. Ez a tulajdonság most kiemelt szerepet kapott: a további tulajdonságok már ennek következményei, így ezeket **tételeknek** tekintjük. (A definíció s a tétel tehát — bizonyos vonatkozásban — viszonylagos fogalmak.)

Jelöljük a definiáló tulajdonságot **P**-vel (vagyis $P = T_1$)! A definíció és a belőle levezethető tételek kapcsolatát a 2. ábrával szemléltethetjük.



2. ábra

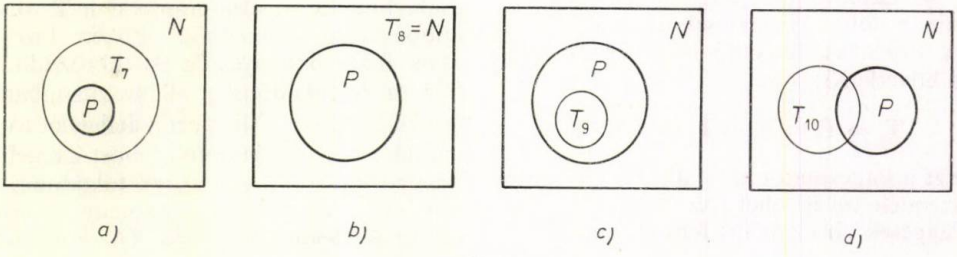
7. Érdemes megvizsgálni még a következő tulajdonságoknak a $T_1 - T_6$ tulajdonságokkal való kapcsolatát is.

T_7: Van két párhuzamos oldala.
T_8: Szögeinek összege 360°.
T_9: Két-két szemközti oldala párhuzamos és szomszédos oldalai különböző hosszúságúak.
T_{10}: Átlói merőlegesek egymásra.

Megmutatható, hogy a felsorolt tulajdonságok egyike sem egyenértékű a T_1 tulajdonsággal, ezért nem fogadhatjuk el őket — a fentebb már értelmezett — paralelogramma definíciójaként.

A $\mathbf{T}_7$ és $\mathbf{T}_8$ túlságosan *tág*, a $\mathbf{T}_9$ túl *szűk*, a $\mathbf{T}_{10}$ viszont részben szűk, részben tág definíció lenne (az ezzel a tulajdonsággal definiált négyszögek halmazának van ugyan közös része a $\mathbf{T}_1$ tulajdonságú paralelogrammák halmazával, de mindegyik halmaznak van a másikba nem tartozó eleme is).

Venn-diagramokkal is szemléltethetjük az említett kapcsolatokat. (A 3/*a*—3/*d* ábrákon *P*-vel jelöltük a paralelogrammák, *N*-nel pedig a négyszögek halmazát, T_7 jelöli a $\mathbf{T}_7$ tulajdonsággal rendelkező négyszögek halmazát stb.)



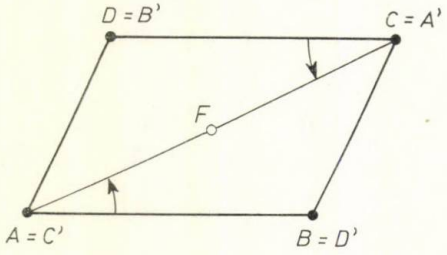
a) b) c) d)

3. ábra

8. Ha jut rá idő, vehetjük még a következőt is:

$\mathbf{T}_{11}$: A négyszög két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő.

Belátható, hogy most viszont a paralelogrammát definiáló tulajdonságot fogalmaztunk meg. Ha ugyanis a négyszöget egyik átlójának felezőpontjára tükrözzük (l. a 4. ábrát), akkor — a váltószögek egyenlősége következtében —



4. ábra

az egyenlő oldalak egymás tükörképei lesznek. Ebből pedig már adódik, hogy négyszögünk középpontosan szimmetrikus, azaz

$$\mathbf{T}_{11} \Rightarrow \mathbf{T}_2 \Rightarrow \mathbf{T}_1 = \mathbf{P}.$$

Az is nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{T}_2 \Rightarrow \mathbf{T}_{11},$$

tehát

$$\mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{T}_{11},$$

amit igazolni akartunk. Eredményünket másképpen is megfogalmazhatjuk: *a paralelogramma olyan trapéz, amelynek két alapja egyenlő.*

A paralelogramma tulajdonságainak ilyen jellegű rendszerezésébe jól beépíthető a *tétel* és *megfordítása* kapcsolat, illetve a *szükséges, elégséges, szükséges és elégséges feltétel* megvilágítása is, de ennek részletezésére most nem térünk ki.

Elemezhető még a következő — *nélkülözhető* elemet tartalmazó — tulajdonság:

$\mathbf{T}_{12}$: A négyszög két-két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő.

A fenti tulajdonságok rendszerezéséről mondottak szoros összhangban vannak FREUDENTHAL gondolataival (vö. [12]-vel!):

„Mit tenne az a tanuló, akinek megengednék, hogy a matematikát maga fedezze fel? A paralelogrammánál egy sereg tulajdonságot észrevenne: a szem-

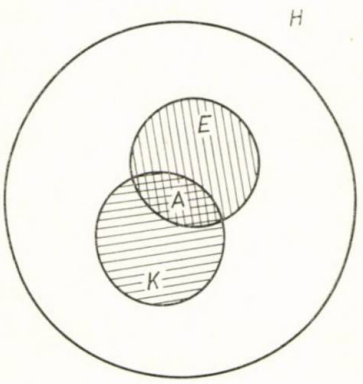
közti oldalak párhuzamosak, a szemközti oldalak egyenlők stb. Ezek egy halom tulajdonságot jelentenek, az egyik éppen olyan fontos, mint a másik ahhoz, hogy egy négyszög paralelogramma legyen. A tanuló e tulajdonságok kusza halmazában észreveszi az összefüggéseket. Fellép a logikai rend. Végül is rájön arra, hogy e tulajdonságok bármelyikét kiválaszthatjuk, s ebből az összes többi levezethető. Ezzel a tanuló felfogta a formális definíció értelmét, s ráadásul *megtanulta a definiálást* (s nemcsak egy definíciót sajátított el, amelyet elébe tálaltak)."

Megjegyezzük még, hogy FREUDENTHAL itt ugyancsak a paralelogramma ún. definiáló tulajdonságaira utal. Mégis fontosnak tartjuk, hogy a tanításban olyan tulajdonságok kapcsolatának vizsgálatára is kitérjünk, amelyek *tartalma* nem azonos a paralelogramma szokásos definíciójával (lásd a T_7—T_{10} tulajdonságokat!). Az ilyen jellegű „ellenpéldák" feltétlenül szükségesek a „definíció" fogalmának pontos körülhatárolásához. A definíció funkciója éppen az, hogy a fogalmat egyértelműen elhatárolja más fogalmaktól.

A deduktív felépítés fogalmának megvilágítása

Oktatásunk mai rendjében elérhetőnek tartjuk, hogy az átlagos képességű osztályokban is a középiskolai tanulmányaikat sikerrel befejező tanulók a geometria deduktív felépítéséről megfelelő képet nyerjenek. Ahogy azt fentebb már kifejtettük, ehhez mindenekelőtt az szükséges, hogy gyakorolják a tanulók az egybevágósági transzformációk tárgyalásakor a tananyag lokális rendszerezését. A hasonlóság tanítása során azután a dedukció „kicsiben vett értelme" átalakul, s a tanulók a *geometria egy nagyobb területének* tárgyalásában meglát hatják már a *dedukció szerepét*. Ezt a célkitűzést azonban csak úgy valósíthatjuk meg, ha megfelelő módon építjük fel a *Hasonlóság* témakörét. A tárgyalásra új tantervünk két lehetőséget is ajánl: kiindulhatunk a *párhuzamos szelők* tételéből, de elkezdhetjük a tanítást a *középpontos hasonlóság* témakörével is. Mint azt a [4], [5], [6] és a [9] alatt említett cikkeinkben részletesen kifejtettük, a fentebb említett célok megvalósítására a két lehetőség közül a *középpontos hasonlósággal indító felépítést tartjuk megfelelőbbnek*. Ez ugyanis mellőzi a párhuzamos szelők kérdéskörének eléggé időigényes (a tanulók számára vontatottnak tűnő) s csak látszólagosan precíz feldolgozását. (A középpontos hasonlóság tulajdonságaira építve viszont a párhuzamos szelőkkel kapcsolatos tételeket már egyszerű feladatokként oldhatjuk meg.)

A hasonlóság témakörének tárgyalása után célszerű a hasonlósági és az egybevágósági transzformáció *kapcsolatát* is szemléltetni. Az 5. ábrán H a hasonlósági transzformációk, K a középpontos hasonlóságok, E az egybevágóságok, A pedig az azonos leképezés (a $\lambda = 1$-nek megfelelő középpontos hasonlóság) jele.



5. ábra

A tanulók gondolkodásmódjának fejlesztésében elért eredményeket azután az *érettségi vizsgákra való* felkészülés időszakában erősíthetjük meg, amikor is sor kerül az apránként felépített ismeretkör magasabb fokú rendezésére, a

megszerzett ismeretek újabb szintézisére. (Erre új tantervünk lehetőséget ad.)

A mondottakkal kapcsolatosan hangsúlyozzuk, hogy a hipotetikus-deduktív tárgyalásmód lényegének megértése, a deduktív okoskodás szükségességének felismertetése, az ily módon való gondolkodás kialakítása *„csakis éveken át türelmesen és fokozatosan haladó nevelés, többlépcsős absztrakció kiépítésének gyümölcse lehet"* (l.: [1], 16. oldal!).

IRODALOM

[1] *Kárteszi F.:* Az axiomatikus tárgyalásmód nehézségei és lehetősége a matematikatanításban (Az ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei, II.)
[2] *Peller J.—Rédling E.:* A tanulók tevékenységének tervezése és irányítása II. (ELTE TTK kiadvány, 1973.)
[3] *Peller J.—Rédling E.:* A tanulók tevékenységének tervezése és irányítása III. (ELTE TTK kiadvány, 1974.)
[4] *Rédling E.:* A hasonlóság témakörének felépítéséről (Az ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei, VII.)
[5] *Rédling E.:* A párhuzamos szelők problémaköre (A Matematika Tanítása, 1975/1.)
[6] *Rédling E.:* A hasonlóság fogalmainak kialakításáról (A Matematika Tanítása, 1977/2.)
[7] *Rédling E.:* Egybevágósági transzformációk (Tolna megyei Pedagógus Továbbképzési Intézet, 1977.)
[8] *Rédling E.:* Geometriai transzformációk (Tankönyvkiadó, sajtó alatt.)
[9] *Rédling E.—Szénásy M.:* A hasonlóság tanításának néhány tapasztalata (Az ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei, X.)
[10] *Rédling E.:* A geometriai gondolkodás fejlődésének szintjei (A Matematika Tanítása, 1979/3.)
[11] *Szénásy M.—Rédling E.:* Beszámoló egy módszertani kezdeményezésről (Az ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei, IX.)
[12] *H. Freudenthal:* Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben? (Der Mathematikunterricht, 1963/4., S. 5—29.)

BENCZE MIHÁLY
tanár
Brassó

Néhány sor alkalmazása a számelméletben

Ebben a cikkben bemutatjuk néhány sor alkalmazását a számelméletben. Ilyen kérdésekkel már EULER is foglalkozott.

1. állítás: Ha f, g: $\mathbf{C} \to \mathbf{N}$, akkor

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot x^{g(n)}\right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) \cdot x^n, \quad \text{ahol} \quad |x| < 1 \quad \text{és}$$

$$F(n) = \sum_{g(n_1)+\ldots+g(n_k)=n} f(n_1) \cdots f(n_k).$$

Az összeg pedig az összes olyan lehetőség számát jelenti, amelyekre n felírható mint $g(n_1)+\ldots+g(n_k)$, ahol $n_1, n_2, \ldots, n_k$ természetes számok.

Bizonyítás:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot x^{g(n)}\right)^k = \sum_{n_1=0,\ldots,n_k=0}^{\infty} f(n_1) \cdots f(n_k) \cdot x^{g(n_1)+\cdots+g(n_k)} = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) \cdot x^n.$$

Mindkét oldalon egyenlővé téve x^n együtthatóit azt kapjuk, hogy:

$$F(n) = \sum_{g(n_1)+\ldots+g(n_k)=n} f(n_1) \cdots f(n_k).$$

Sajátos esetek:

(1) Ha $f(n)=1$, akkor $F(n)$ jelöli az összes olyan lehetőség számát, amelyekre n felírható mint $g(n_1)+\ldots+g(n_k)$.
(2) Ha $f(n)=1$ és $g(n)=n^p$, akkor $F(n)$ jelöli az összes olyan lehetőség számát, amelyekre n felírható mint $n_1^p+\ldots+n_k^p$.
(3) Tekintsük a következő esetet:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^{k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{k+1}(n)\cdot x^n.$$

Ha $k=0$, akkor $F_1(n)=1$.
Ha $k=1$, akkor $F_2(n)=n+1$.
Ha $k=2$, akkor $F_3(n)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$; ezek az ún. trianguláris számok.
Ha $k=3$, akkor $F_4(n)=\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$; ezek az ún. tetraéderes számok.

Teljes indukció módszerével rögtön igazolható a következő rekurziós összefüggés:

$$F_{k+1}(n) = \sum_{i=0}^{n} F_k(i).$$

Az összegezést elvégezve azt kapjuk, hogy

$$F_{k+1}(n) = \binom{n+k}{k}.$$

Ez az észrevétel feljogosít a következő általánosításra.

Meghatározás: k-dimenziós tetraéderes számoknak nevezzük mindazokat a természetes számokat, amelyek $\binom{n+k}{k}$ alakba írhatók.

Ha $k=2$, akkor visszakapjuk a „trianguláris" számokat. Ha $k=3$, akkor kapjuk a „tetraéderes" számokat.

1. tétel:
Két egymás után következő k-dimenziós tetraéderes szám különbsége $(k-1)$ dimenziós tetraéderes szám.

Bizonyítás:
Kiindulva az $\binom{n+1+k}{k}-\binom{n+k}{k}=\binom{n+1+k-1}{k-1}$ azonosságból közvetlenül adódik a tétel.

2. tétel:
Tetszőleges $(k-p)$ dimenziós tetraéderes szám felírható 2^{p+1} k-dimenziós tetraéderes szám algebrai összegeként.

Bizonyítás:
Legyen $T_n(k)=\binom{n+k}{k}$, akkor teljes indukcióval azonnal igazolható, hogy

$$T_{n+1}(k-p) = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \binom{p+1}{i} T_{n+1-i}(k).$$

Ebből rögtön következik a tétel.

Mivel minden természetes szám felfogható 1 dimenziós tetraéderes számnak, ezért a **2. tétel**ből következik, hogy tetszőleges természetes szám felírható 2^k darab k dimenziós tetraéderes szám algebrai összegeként.

Néhány nyitott kérdés:

(*a*) Határozzuk meg mindazokat a k természetes számokat, amelyekre tetszőleges $(k-2)$ dimenziós tetraéderes szám felírható $k+1$ darab k dimenziós tetraéderes szám algebrai összegeként! ($k=3$-ról könnyen igazolható, hogy kielégíti a feltételt.)

(*b*) Határozzuk meg mindazokat a k természetes számokat, amelyekre egy $(k-2)$ dimenziós tetraéderes szám négyzete felírható legfeljebb $k+1$ darab k dimenziós tetraéderes szám algebrai összegeként! (Ha $k=3$, akkor ez éppen SALZER tétele.)

(*c*) Határozzuk meg mindazokat a k dimenziós tetraéderes számokat, amelyek egyszersmind p dimenziós tetraéderes számok is!
($k=3$-ra és $p=2$-re E. B. ESCOTT és H. SENDACKA igazolta, hogy 1, 10, 1540 és 7140 egyidejűleg trianguláris és tetraéderes számok is.)

(*d*) Határozzuk meg mindazokat a k dimenziós tetraéderes számokat, amelyek felírhatók egy p dimenziós tetraéderes szám q-adik hatványaként!
($k=2$, $p=2$ és $q=2$ esetre 1946-ban W. LJUNGGREN igazolta, hogy 1 és 6 az egyedüli olyan számok, amelyek kielégítik a fenti feltételt.
$k=3$, $p=1$ és $q=2$ esetre 1875-ben E. LUCAS feltételezte, hogy 1, 4 és 19 600 az egyedüli olyan számok, amelyek kielégítik a fönti feltételt. Ezt a sejtést 1918-ban G. N. WATSON igazolta.)

2. állítás: Ha $f, g: \mathbf{C} \to \mathbf{N}$ és

$$\mathbf{N}_g = \{g(1), g(2), \ldots, g(n), \ldots\} \subseteq \mathbf{N}, \quad \text{akkor}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n) \cdot x^{g(n)}}{1 - x^{g(n)}} = \sum_{n=1}^{\infty} F(n) \cdot x^n, \quad \text{ahol} \quad |x| < 1 \quad \text{és} \quad F(n) = \sum_{\frac{n}{n_i} \in \mathbf{N}_g} f(n_i).$$

Bizonyítás:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n) \cdot x^{g(n)}}{1 - x^{g(n)}} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot (x^{g(n)} + x^{2g(n)} + \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} F(n) \cdot x^n.$$

Mindkét oldalon egyenlővé téve x^n együtthatóit azt kapjuk, hogy $F(n) = \sum f(n_i)$, ahol n_i-vel jelöltük az n osztóit, és a szumma kiterjed mindazokra az esetekre, amelyekre $k \cdot g(n_i) = n$, ahol $k \in \mathbf{N}_g$.

Sajátos esetek:

(1) Ha $g(n) = n^k$ és $\mathbf{N}_k = \{1^k, 2^k, \ldots, n^k, \ldots\} \subseteq \mathbf{N}$, akkor

$$F(n) = \sum_{\frac{n}{n_i} \in \mathbf{N}_k} f(n_i).$$

(2) Ha $g(n) = n$, akkor azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n) \cdot x^n}{1 - x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} F(n) \cdot x^n, \quad \text{ahol} \quad F(n) = \sum_{n_i | n} f(n_i),$$

amit V. C. HARRIS és LEROY J. WARREN (lásd [3]-at!) is igazolt.

(3) Ha $f(n) = n$ és $g(n) = n$, akkor azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{1 - x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) \cdot x^n,$$

ahol $\sigma(n)$ az n osztóinak összegét jelenti.

(4) Ha $f(n)=1$ és $g(n)=n$, akkor azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) \cdot x^n,$$

ahol $d(n)$ az n osztóinak számát jelenti. Ezt a sort LAMBERT-féle sornak nevezik.

Megjegyzés: Ha f, g: $\mathbf{C} \to \mathbf{N}$ és

$$\mathbf{N}_g = \{g(1), g(2), \ldots, g(n), \ldots\} \subseteq \mathbf{N}, \quad \text{akkor}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n) \cdot x^{g(n)}}{1-x^{g(n)}}\right)^k = \sum_{n=1}^{\infty} G(n) \cdot x^n,$$

ahol $|x|<1$ és

$$G(n) = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} F(n_1) \cdot F(n_2) \cdots F(n_k),$$

ahol

$$F(n) = \sum_{\frac{n}{n_i} \in \mathbf{N}_g} f(n_i).$$

3. állítás: Ha f, g: $\mathbf{C} \to \mathbf{N}$ és

$$\mathbf{N}_g = \{g(1), g(2), \ldots, g(n), \ldots\} \subseteq \mathbf{N}, \quad \text{akkor}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n) \cdot x^{g(n)}}{1+x^{g(n)}} = \sum_{n=1}^{\infty} F(n) \cdot x^n, \quad \text{ahol} \quad |x| < 1 \quad \text{és}$$

$$F(n) = -\sum_{\frac{n}{n_i} \in \mathbf{N}_g} (-1)^{\frac{n}{n_i}} \cdot f(n_i).$$

Megjegyzés: Ha f, g: $\mathbf{C} \to \mathbf{N}$ és

$$\mathbf{N}_g = \{g(1), g(2), \ldots, g(n), \ldots\} \subseteq \mathbf{N}, \quad \text{akkor:}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n) \cdot x^{g(n)}}{1+x^{g(n)}}\right)^k = \sum_{n=1}^{\infty} G(n) \cdot x^n, \quad \text{ahol} \quad |x| < 1 \quad \text{és}$$

$$G(n) = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} F(n_1) \cdot F(n_2) \cdots F(n_k), \quad \text{ahol}$$

$$F(n) = -\sum_{\frac{n}{n_i} \in \mathbf{N}_g} (-1)^{\frac{n}{n_i}} \cdot f(n_i).$$

Az f és g függvények helyett a $\varphi(n)$, a $\sigma(n)$, a $d(n)$, a $\pi(n)$, a MOEBIUS-, a MANGOLDT-, a LEGENDRE- vagy a JACOBI-féle függvényeket használva az 1., 2. és 3. állításban, sok érdekes esetet kapunk, amelyek részletes vizsgálatát a tisztelt olvasóra bízzuk.

IRODALOM

[1] *Dickson, L. E.:* History of the numbers. New York 1952.
[2] *Lucas, E.:* Théorie des nombres. Paris 1891.
[3] *V. C. Harris and Leroy J. Warren:* A Generating Function for $\sigma_k(n)$. The American Math. Monthly, June—July 1959., pag. 467.
[4] *W. Sierpinski:* Elementary theory of numbers. Warszawa 1964.

HÓDI ENDRE
osztályvezető
Országos Pedagógiai Intézet

Magyar tanulók részvétele a 31. Évenkénti Középiskolai Matematikai Versenyvizsgán

I. Bevezetés

Dr. Walter E. Mientka nebraskai (USA) egyetemi tanár, az Évenkénti Középiskolai Matematikai Versenyvizsga versenybizottságának végrehajtó igazgatója 1979. október 30-án kelt ajánlott levelében megküldte címünkre a 31. ilyen versenyvizsga feladatainak szövegét.

Ennek alapján lehetővé vált, hogy az Oktatási Minisztérium Középiskolai Főosztályának engedélye alapján bizonyos számú magyar középiskolás is részt vegyen az ez évi (31.) Évenkénti Középiskolai Matematikai Versenyvizsgán, amelyet az egész Egyesült Államokban egyidejűleg március 4-én, kedden rendeztek meg.

Dr. Welker Ottó minisztériumi főtanácsos azt tartotta indokoltnak, hogy a magyar tanulók az elmúlt évi keretek között vegyenek részt a versenyvizsgán. Ez azt jelentette, hogy a versenyzők a központi olimpiai előkészítő szakkörök tagjaiból kerültek ki, mégpedig Budapestről 54-en, Debrecenből 27-en, Győrből 28-an, Miskolcról 23-an, Nagykanizsáról 19-en, Pécsről 8-an, Szegedről 23-an, Székesfehérvárról 27-en, végül Veszprémből 11-en, összesen tehát 220-an küldték be a tesztfeladatokra adott megoldásukat.

A feladatok szövegét jelen sorok írója fordította magyarra, a magyar fordítást a Bolyai János Matematikai Társulat sokszorosíttatta az Oktatási Minisztérium költségén.

Magyarországon a versenyvizsgát az előbbiekben felsorolt 9 városban ugyancsak egyidejűleg bonyolították le, mégpedig április 15-én, kedden 14 órai kezdettel.

A versenyzőknek 90 perc állt rendelkezésre ahhoz, hogy a 30 tesztfeladat mindegyikére megjelöljék, melyik az egyetlen helyes megoldás a feladatonként kiírt öt különböző eredmény közül. A versenyzők számára a ceruzát javasolták írószerként. Ennek megfelelően megengedett volt nekik fogalmazványpapír, kockás papír, vonalzó, körző és törlőgumi használata, logarlécé és zsebszámológépé azonban nem.

A tanulók által elért összpontszámot a $4H-R+30$ képlet adta meg, ahol H a helyes, R pedig a rossz válaszok számát jelöli. Eszerint a megszerezhető legkevesebb pont 0, a legtöbb 150 volt. E két határ között — hat szám kivételével — elvileg bármely egész pontszámot el lehetett érni.

II. A feladatok

1. A legnagyobb olyan egész szám, amelynek 7-szerese kevesebb 100-nál

(A) 12, (B) 13, (C) 14, (D) 15, (E) 16.

2. Az $(x^2+1)^4(x^3+1)^3$ kifejezésnek mint x polinomjának fokszáma

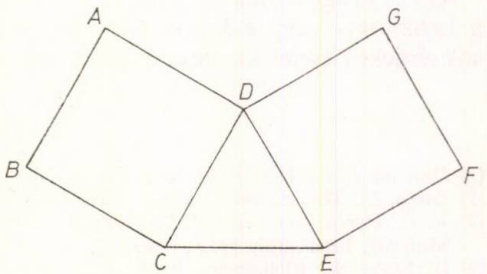
(A) 5, (B) 7, (C) 12, (D) 17, (E) 72.

3. Ha $2x-y$ aránya $(x+y)$-hoz $\frac{2}{3}$-dal egyenlő, akkor mennyivel egyenlő x aránya y-hoz?

(A) $\frac{1}{5}$-del, (B) $\frac{4}{5}$-del, (C) 1-gyel, (D) $\frac{6}{5}$-del, (E) $\frac{5}{4}$-del.

4. A mellékelt ábrán CDE egyenlő oldalú háromszög, továbbá $ABCD$ és $DEFG$ négyzetek. Mekkora a $GDA\sphericalangle$? (1. ábra)

(A) 90°, (B) 105°, (C) 120°, (D) 135°, (E) 150°.



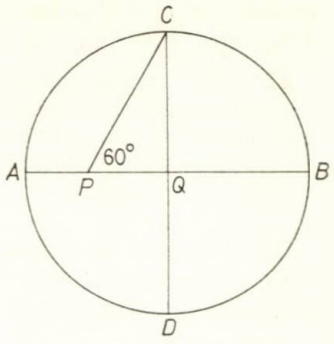
1. ábra

5. Ha AB és CD a Q középpontú kör egymásra merőleges átmérői, továbbá a $QPC\sphericalangle$ 60°-os, akkor a PQ

szakasz hossza osztva az AQ szakasz hosszával, egyenlő (2. ábra)

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$-vel, (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$-mal, (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$-vel,

(D) $\frac{1}{2}$-del, (E) $\frac{2}{3}$-dal.



2. ábra

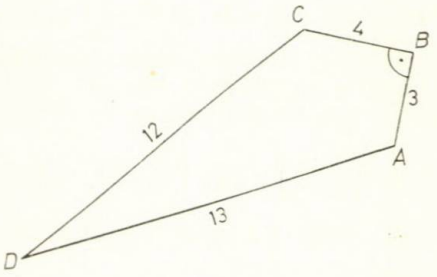
6. Egy x pozitív szám akkor és csak akkor tesz eleget a $\sqrt{x}<2x$ egyenlőtlenségnek, ha

(A) $x>\frac{1}{4}$, (B) $x>2$, (C) $x<4$,

(D) $x<\frac{1}{4}$, (E) $x<4$.

7. Az $ABCD$ konvex négyszög AB, BC, CD és DA oldala rendre 3, 4, 12, illetve 13 egységnyi hosszú, azonkívül a $CBA\sphericalangle$ derékszög. A négyszög területe (3. ábra)

(A) 32, (B) 36, (C) 39, (D) 42, (E) 48.



3. ábra

8. Hány, zérótól különböző valós számokból álló (a, b) számpár elégíti ki az

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$$

egyenletet?

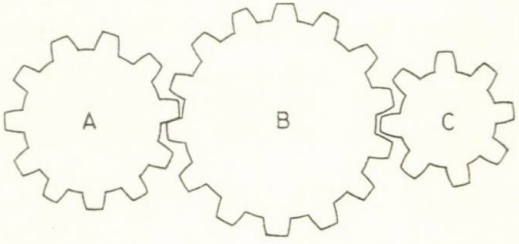
(A) egy sem, (B) 1, (C) 2, (D) minden 0-tól különböző b-re egy számpár, (E) minden 0-tól különböző b-re két számpár.

9. Egy ember x mérföldet tesz meg nyugati irányban, majd balra fordul 150°-kal és 3 mérföldet tesz meg az új irányban. Ha útjának végén $\sqrt{3}$ mérföldnyi távolságban van kiindulási helyétől, akkor x egyenlő

(A) $\sqrt{3}$-mal, (B) $2\sqrt{3}$-mal, (C) $\frac{3}{2}$-del, (D) 3-mal,

(E) nem határozható meg egyértelműen a közölt adatokból.

10. Az egymásba kapcsolódó A, B és C fogaskerekek fogainak száma rendre x, y, illetőleg z. (Mindhárom fogaskerék fogai azonos méretűek és szabályos elhelyezkedésűek, amint az az ábrán is látható.) Ekkor az A, B és C fogaskerék percenkénti fordulatszámmal mért szögsebességének aránya (4. ábra)



4. ábra

(A) $x:y:z$, (B) $z:y:x$, (C) $y:z:x$, (D) $yz:xz:xy$, (E) $xz:yx:zy$.

11. Ha egy bizonyos számtani sorozatban az első 10 elem összege 100-zal, míg

az első 100 elem összege 10-zel egyenlő, akkor az első 110 elem összege

(A) 90, (B) -90, (C) 110, (D) -110, (E) -100.

12. Az L_1 egyenes egyenlete $y=mx$, az L_2 egyenesé $y=nx$. Tegyük fel, hogy L_1 irányszöge kétszer akkora, mint L_2-é, és hogy L_1 meredeksége négyszerese L_2 meredekségének! Ha L_1 nem párhuzamos az x tengellyel, akkor mn egyenlő

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$-vel, (B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$-vel, (C) 2-vel, (D) -2-vel,

(E) nem határozható meg egyértelműen a közölt adatokból.

13. Egy (elhanyagolható méretű) bogár elindul a síkbeli derékszögű koordinátarendszer kezdőpontjából. Először 1 egységnyi utat tesz meg jobbra az $(1;\ 0)$ pontba. Ott 90°-os fordulatot végez az óramutató járásával ellentétes irányban és $\frac{1}{2}$ egységnyi utat jár be: így eljut az $\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$ pontba. Ha ugyanilyen módon folytatja útját, azaz minden egyhuzamban megtett útszakasz után 90°-kal elfordul az óramutató járásával ellentétes irányban és ezután feleakkora utat tesz meg, mint közvetlenül előtte, akkor a következő pontok közül melyiket közelíti meg legjobban?

(A) $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$, (B) $\left(\frac{4}{5};\frac{2}{5}\right)$, (C) $\left(\frac{2}{3};\frac{4}{5}\right)$, (D) $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$, (E) $\left(\frac{2}{5};\frac{4}{5}\right)$.

14. Ha az f függvény, amelyet következőképpen definiálunk:

$$f(x)=\frac{cx}{2x+3},\quad x\neq -\frac{3}{2};$$

minden, a $\left(-\frac{3}{2}\right)$-től különböző x valós számra eleget tesz az $f(f(x))=x$ feltételnek, akkor c egyenlő

(A) -3-mal, (B) $-\frac{3}{2}$-del, (C) $\frac{3}{2}$-del, (D) 3-mal,

(E) nem határozható meg egyértelműen a közölt adatokból.

15. Egy üzletben úgy állapítják meg az egyik árucikk árát dollárban és centben, hogy ha hozzáadnak 4% forgalmi adót, akkor nincs szükség kerekítésre, mert az eredmény pontosan n dollár, ahol n pozitív egész számot jelöl. Az n legkisebb értéke

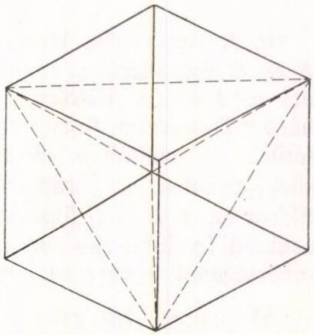
(A) 1, (B) 13, (C) 25, (D) 26, (E) 100.

16. Egy kocka nyolc csúcsa közül négy egy szabályos tetraéder csúcspontjait adja. Mennyi a kocka és a tetraéder felszínének aránya? (5. ábra)

(A) $\sqrt{2}$, (B) $\sqrt{3}$, (C) $\sqrt{\frac{3}{2}}$, (D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$, (E) 2.

17. Tudva azt, hogy $i^2=-1$; hány n egész számesetén lesz $(n+i)^4$ is egész szám?

(A) egy esetben sem, (B) 1, (C) 2, (D) 3,
(E) 4.



5. ábra

18. Ha $b>1$, $\sin x>0$, $\cos x>0$ és $\log_b \sin x=a$, akkor $\log_b \cos x$ egyenlő

(A) $2\log_b(1-b^{\frac{a}{2}})$-vel, (B) $\sqrt{1-a^2}$-tel, (C) b^{a^2}-tel,

(D) $\frac{1}{2}\log_b(1-b^{2a})$-val, (E) ezek egyikével sem.

19. Legyen C_1, C_2 és C_3 egy körnek három olyan párhuzamos húrja, amelyek mind a középpontnak ugyanazon az oldalán helyezkednek el! A C_1 és C_2 között levő távolság egyenlő a C_2 és C_3 közötti távolsággal. A húrok hossza rendre 20, 16, illetve 8 egység. Akkor a kör sugara

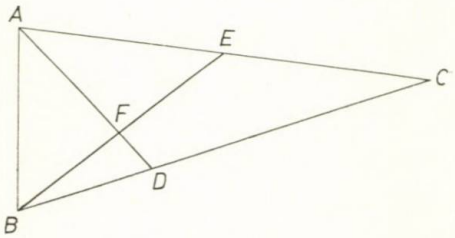
(A) 12, (B) $4\sqrt{7}$, (C) $\frac{5\sqrt{65}}{3}$, (D) $\frac{5\sqrt{22}}{2}$,

(E) nem határozható meg egyértelműen a közölt adatokból.

20. Egy dobozban két darab 1 centes, négy darab 5 centes és hat darab 10 centes érme van. Hat pénzdarabot húzunk ki a dobozból visszatevés nélkül. Mindegyik érme húzása egyformán valószínű. Mekkora a valószínűsége, hogy a kihúzott hat pénzdarab együttes értéke legalább 50 cent?

(A) $\frac{37}{924}$, (B) $\frac{91}{924}$, (C) $\frac{127}{924}$, (D) $\frac{132}{924}$, (E) ezek egyike sem.

21. Az ABC háromszögben a $CBA\sphericalangle$ 72°-os, E az AC oldal felezőpontja, D pedig a BC oldalnak a B csúcs felé eső harmadolópontja. AD és BE az F pontban metszik egymást. Ekkor a BDF háromszög és az $FDCE$ négyszög területének hányadosa (6. ábra)



6. ábra

(A) $\frac{1}{5}$, (B) $\frac{1}{4}$, (C) $\frac{1}{3}$, (D) $\frac{2}{5}$,

(E) ezek egyike sem.

22. Minden x valós szám esetén legyen $f(x)$ a $4x+1$, $x+2$ és $-2x+4$ számok minimuma! Ekkor $f(x)$ maximuma

(A) $\frac{1}{3}$, (B) $\frac{1}{2}$, (C) $\frac{2}{3}$, (D) $\frac{5}{2}$, (E) $\frac{8}{3}$.

23. Egy derékszögű háromszög derékszögű csúcsából az átfogó harmadolópontjaiba húzott szakaszok hossza $\sin x$, illetve $\cos x$, ahol x olyan valós számot jelöl, melyre $0<x<\frac{\pi}{2}$. Akkor az átfogó hosszúsága

(A) $\frac{4}{3}$, (B) $\frac{3}{2}$, (C) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$, (D) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$,

(E) nem határozható meg egyértelműen a közölt adatokból.

24. Bizonyos r valós számra a $8x^3-4x^2-42x+45$ polinom osztható $(x-r)^2$-tel. A következő számok közül melyik az r-hez legközelebbi?

(A) 1,22, (B) 1,32, (C) 1,42, (D) 1,52, (E) 1,62.

25. Az $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}=\{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots\}$ nem csökkenő sorozatban mindegyik pozitív páratlan egész k szám k-szor lép fel. Tény, hogy van olyan b, c és d egész szám, amelyekre minden pozitív egész n esetén érvényes:

$$a_n = b[\sqrt{n+c}]+d,$$

ahol $[x]$ azt a legnagyobb egész számot jelöli, mely kisebb x-nél vagy legfeljebb egyenlő vele. Ekkor a $b+c+d$ összeg

(A) 0, (B) 1, (C) 2, (D) 3, (E) 4.

26. Négy, egységnyi sugarú gömb közül mindegyik érinti a többi hármat. A gömbök köré s élhosszúságú szabályos tetraédert írunk. Akkor s egyenlő

(A) $4\sqrt{2}$-vel, (B) $4\sqrt{3}$-mal, (C) $2\sqrt{6}$-tal, (D) $(1+2\sqrt{6})$-tal,

(E) $(2+2\sqrt{6})$-tal.

27. A $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$ összeg egyenlő

(A) $\frac{3}{2}$-del, (B) $\frac{\sqrt[3]{65}}{4}$-gyel, (C) $\frac{1+\sqrt[6]{13}}{2}$-vel, (D) $\sqrt[3]{2}$-vel,

(E) ezek egyikével sem.

28. Az $x^{2n}+1+(x+1)^{2n}$ polinom nem osztható az x^2+x+1 polinommal, ha n egyenlő

(A) 17-tel, (B) 20-szal, (C) 21-gyel, (D) 64-gyel, (E) 65-tel.

29. Hány, egész számokból álló (x, y, z) rendezett számhármas elégíti ki az alábbi egyenletrendszert?

$$\begin{aligned} x^2-3xy+2y^2 \quad &- z^2 = 31 \\ -x^2 \quad &+6yz+2z^2 = 44 \\ x^2+xy \quad &+8z^2 = 100 \end{aligned}$$

(A) 0, (B) 1, (C) 2, (D) kettőnél több, de véges sok,

(E) végtelen sok.

30. Egy hatjegyű, tízes számrendszerbeli számot „tökéletes négyzet"-nek nevezünk, ha eleget tesz a következő feltételeknek:

(1) egyetlen számjegye sem zéró;

(2) teljes négyzet; és

(3) az első két számjegyéből, a középső két számjegyéből és az utolsó két számjegyéből álló kétjegyű számok (megtartva a számjegyek eredeti sorrendjét) mindegyike szintén teljes négyzet.

Hány „tökéletes négyzet" van?

(A) 0, (B) 2, (C) 3, (D) 8, (E) 9.

III. A feladatok helyes megoldása

rendre a következő betűk mellett található:

C – D – E – C – B – A – B – A – E – D – D – C – B – A – B – B – D – D – D – C – – A – E – C – D – C – E – E – C – A – B

IV. A magyar versenyzők eredménye

x számú versenyzőnk y pontot ért el a következő táblázat szerint:

$x =$	1,	1,	1,	2,	1,	3,	1,	2,	1,	1,	3,	3,	3,	3,	4,
$y =$	32,	39,	42,	45,	48,	50,	51,	52,	53,	54,	55,	56,	57,	58,	59,
$x =$	6,	3,	5,	3,	5,	7,	5,	5,	3,	5,	6,	2,	6,	4,	8,
$y =$	60,	61,	62,	64,	65,	66,	67,	68,	69,	70,	71,	72,	73,	74,	75,
$x =$	4,	3,	6,	7,	10,	6,	8,	4,	4,	7,	5,	3,	3,	6,	2,
$y =$	76,	77,	78,	79,	80,	81,	82,	83,	84,	85,	86,	87,	88,	89,	90,
$x =$	1,	2,	3,	5,	2,	5,	2,	2,	1,	2,	1,	1,	1,		
$y =$	91,	92,	93,	95,	96,	97,	98,	99,	100,	101,	104,	105,	106,		
$x =$	3,	1,	2,	1,	3,	1									
$y =$	108,	109,	110,	112,	113,	121									

A legjobbak (akik legalább 100 pontot szereztek; ezek teljesítményét minden részt vevő államban kiemelkedőnek tekintik):

1. **Dénes László,** a székesfehérvári Teleki Blanka Gimnázium IV. osztályos tanulója 121 pontot;

2—4. **Károlyi Gyula,** a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium II. c. osztályos tanulója;

Király Zoltán, a miskolci Földes Ferenc Gimnázium III. osztályos tanulója;

Tóth Viktor, a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium III. c. osztályos tanulója 113 pontot;

5. **Kiss György,** a miskolci Földes Ferenc Gimnázium IV. osztályos tanulója 112 pontot;

6—7. **Palasik Sándor,** a bonyhádi Petőfi Sándor Gimnázium III. b. osztályos tanulója;

Tóth Tamás, a bonyhádi Petőfi Sándor Gimnázium IV. b. osztályos tanulója 110 pontot;

8. **Sárközi Ferenc,** a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium IV. osztályos tanulója 109 pontot;

9—11. **Hátsági Zsolt,** a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium IV. c. osztályos tanulója;

Kőrössy Katalin, a miskolci Földes Ferenc Gimnázium IV. c. osztályos tanulója;

Németh Zoltán, a szegedi JATE Ságvári Endre Gyakorló Gimnáziumának IV. d. osztályos tanulója 108 pontot;

12. **Ótott-Kovács István,** a szegedi JATE Ságvári Endre Gyakorló Gimnáziumának II. d. osztályos tanulója 106 pontot;

13. **Kurusa Árpád,** a szegedi JATE Ságvári Endre Gyakorló Gimnáziumának IV. osztályos tanulója 105 pontot;

14. **Énekes Béla,** a bonyhádi Petőfi Sándor Gimnázium III. osztályos tanulója 104 pontot;

15—16. **Nagy Csaba,** a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium IV. c. osztályának tanulója;

Szabó László, a csongrádi Batsányi János Gimnázium és Óvónői Szakközépiskola IV. osztályos tanulója 101 pontot;

17. **Seress Attila,** a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium II. osztályos tanulója 100 pontot ért el.

Az a teljesítmény, amelyet az idei versenyvizsgán legjobban szerepelt magyar diákok produkáltak, valamivel alatta marad a megfelelő tavalyinak. Ebben minden bizonnyal az is közrejátszott, hogy egyrészt a feladatok kissé nehezebbek voltak, mint az előző évben, másrészt az amerikai és a magyar matematika-tantervek eltérése is erősebben érvényesült a most kitűzött feladatokban.

V. Befejezés

Ez úton is köszönetünket fejezzük ki az Amerikai Matematikai Társulat középiskolai versenybizottságának, különösen pedig Mientka professzor úrnak, hogy a szükséges anyagok rendelkezésünkre bocsátásával lehetővé tette a központi olimpiai előkészítő szakkörökben tevékenykedő diákjaink részvételét a 31. Évenkénti Középiskolai Matematikai Versenyvizsgán.

A nálunk kevéssé szokásos feladatokkal való ismerkedés feltétlenül hozzájárul matematikával szívesen foglalkozó tanulóink, sőt tanáraink látókörének bővüléséhez is.

HÓDI ENDRE
osztályvezető
Országos Pedagógiai Intézet

Rövid beszámoló a finnországi nemzetközi matematikai tanulmányi versenyről

Olli Syvähuoko, a Finn Matematika-, Fizika- és Kémiatanárok Egyesületének elnöke f. évi február hó 18-án levelet írt a Bolyai János Matematikai Társulat elnökének, amelyben közölte, hogy egyesületük nemzetközi matematikai és fizikai tanulmányi versenyt rendez a tanév befejezését követően. Ezekre a versenyekre Magyarországról és Svédországból hívnak meg és látnak vendégül egy-egy csapatot lényegében a nemzetközi matematikai, illetve fizikai diákolimpiákon kialakult feltételekkel. Az alábbiakban már csak a matematikai versenyről fogunk szólni.

A finnek meghívóját az Oktatási Minisztériumba továbbították, ott döntöttek a meghívás elfogadásáról, és a matematikai versenyen részt vevő magyar diákok vezetőinek Hódi Endrét, az OPI Matematikai Nevelési Osztályának vezetőjét, valamint dr. Reiman Istvánt, a BME Geometria Tanszékének docensét jelölték ki.

Diákjainkat dr. Reiman István készítette fel a versenyre; ebben a munkájában Csirmaz László, az MTA Matematikai Kutató Intézetének tudományos munkatársa segítette. A felkészítéshez a vidéki központi szakkörök tevékenysége is hozzájárult. A versenyen részt vevő tanulók kiválasztását Hódi Endre, dr. Reiman István és Csirmaz László végezte. Ennek értelmében a nemzetközi versenyen a következő tanulók képviselték hazánkat (zárójelben rövid jelölésük):

Benkő Bálint, a székesfehérvári Teleki Blanka Gimnázium IV. osztályos tanulója (H 1);

Bohus Géza, a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium IV. osztályos tanulója (H 2);

Elek Gábor, a budapesti Eötvös József Gimnázium III. osztályos tanulója (H 3);

Károlyi Gyula, a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium II. osztályos tanulója (H 4);

Kiss György, a miskolci Földes Ferenc Gimnázium IV. osztályos tanulója (H 5);

Simonyi Gábor, a budapesti Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium II. osztályos tanulója (H 6);

Tardos Gábor, a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium II. osztályos tanulója (H 7);

Umann Gábor, a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium IV. osztályos tanulója (H 8).

Az osztályok megjelölése az 1979—80. tanévre vonatkozik.

A versenyen való kitűzésre összesen 22 feladatjavaslat érkezett, mégpedig Nagy-Britanniából (GB) 4, Magyarországról (H), Svédországból (S) és Finnországból (SF) 6—6. (Az angol csapat saját költségén vett részt a nemzetközi versenyen.)

A zsüritagok — mind a négy ország csapatának egy-egy vezetője — ezek közül választották ki a versenyen kitűzött 3—3 feladatot. Döntésük szerint az első versenynapra, július 1-re olyan három feladatot tűztek ki, amelyek rendre az angol, a svéd és a magyar javaslatokból valók voltak, és hibátlan megoldásukkal a tanulók sorjában 6, 7, illetve 7 pontot szerezhettek.

A második versenynap (július 2.) feladatait rendre a magyar, a finn és az angol küldöttség terjesztette be; kifogástalan megoldásukért sorjában ismét 6, 7 és 7 pont járt.

A feladatok megoldásához mindkét napon 4—4 óra állt a versenyzők rendelkezésére. Munkájukhoz semmilyen segédeszközt nem vehettek igénybe, zsebszámológépet sem.

A verseny az egyik Mariehamn-i iskolában folyt le. (Mariehamn az Åland-szigetek fővárosa.)

A kitűzött versenyfeladatok magyar szövege a következő:

Első nap.

1. Jelöljük egy tetszőleges ABC háromszög szögeit rendre α-val, β-val, illetve γ-val! Az AB oldal felezőmerőlegese messe a BC oldalt vagy annak meghosszabbítását az X pontban, az AC oldal felezőmerőlegese pedig ugyanezt az egyenest az Y pontban!

Bizonyítsa be, hogy a $BC=XY$ teljesülésének elegendő feltétele:

$$\operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma = 3.$$

Bizonyítsa be, hogy ez a feltétel nem szükséges, és adja meg a $BC=XY$ teljesülésének szükséges és elegendő feltételét!

2. Az $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sorozatot következőképpen definiáltuk:

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2}; \\ a_{k+1} = a_k + \dfrac{1}{n} \cdot a_k^2, \quad \text{ha} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Bizonyítsa be, hogy

$$1 - \frac{1}{n} < a_n < 1.$$

3. Bizonyítsa be, hogy az

$$x^n + 1 = y^{n+1}$$

egyenletnek, ahol n a 2-nél nem kisebb egész számot jelöl, nincs olyan pozitív egész megoldása x-re és y-ra, amelyben x és $n+1$ relatív prím számok lennének!

Második nap.

4. Mely n természetes számokra érvényes a következő állítás?

Ha egy körbe írható, $2n$ oldalú konvex sokszögnek $n-1$ párhuzamos szemközti oldalpárja van, akkor az n-edik szemközti oldalpárja is párhuzamos. (Az $A_1A_2\ldots A_{2n}$ $2n$ oldalú sokszög szemközti oldalpárja pl. A_1A_2 és $A_{n+1}A_{n+2}$.)

5. Valamely, a síkbeli derékszögű koordináta-rendszer x tengelyével párhuzamos egyenest akkor nevezünk triangulárisnak, ha balról jobbra vett sorrendben olyan különböző A, B, C és D pontokban metszi az

$$y = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$$

egyenletű görbét, hogy az AB, AC és AD szakaszok egy háromszög oldalai lehetnek.

Bizonyítsa be, hogy azok közül az x tengellyel párhuzamos egyenesek közül, amelyek négy különböző pontban metszik a szóban forgó görbét vagy mindegyik triangulláris, vagy egyikük sem az!

6. Állapítsa meg, hogy mely számjegyek állnak közvetlenül a tizedesvesszőtől balra és jobbra a

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{1980}$$

szám tízes számrendszerben felírt alakjában!

Az alábbi táblázatok azt tüntetik fel, hogy a verseny résztvevői hány pontot értek el az egyes feladatok megoldásában.

A tanuló	1.	2.	3.	4.	5.	6.	összes pontjának száma
	feladatban elért pontjainak száma						
GB 1	4	4	0	0	0	2	10
GB 2	2	0	0	6	0	0	8
GB 3	6	0	0	5	0	0	11
GB 4	0	0	0	4	0	1	5
GB 5	6	0	0	6	0	0	12
GB 6	1	0	0	3	0	0	4
GB 7	2	0	0	4	5	6	17
GB 8	6	0	0	6	0	5	17
Összesen:	27	4	0	34	5	14	84
H 1	6	0	4	3	7	0	20
H 2	6	0	7	6	3	6	28
H 3	0	0	0	5	0	4	9
H 4	6	0	0	6	0	0	12
H 5	5	0	4	6	0	0	15
H 6	6	0	2	6	0	4	18
H 7	3	0	0	6	7	0	16
H 8	5	0	0	6	0	5	16
Összesen:	37	0	17	44	17	19	134
S 1	2	0	0	4	0	0	6
S 2	0	0	2	2	0	7	11
S 3	0	0	0	6	0	4	10
S 4	2	0	4	6	7	7	26
S 5	0	0	0	4	0	5	9
S 6	0	0	0	4	0	0	4
S 7	0	0	0	1	0	1	2
S 8	0	0	0	5	0	3	8
Összesen:	4	0	6	32	7	27	76
SF 1	2	0	0	1	0	0	3
SF 2	6	0	0	6	6	0	18
SF 3	0	0	0	1	0	0	1
SF 4	0	0	0	3	0	0	3
SF 5	0	0	0	6	0	0	6
SF 6	5	0	0	4	0	0	9
SF 7	6	7	0	5	1	0	19
SF 8	0	0	0	1	0	0	1
Összesen:	19	7	0	27	7	0	60

A versenyen a következő tanulók szereztek legalább 10 pontot:

1.	Bohus Géza (H 2)	28 pontot,
2.	Johan Råde (S 4)	26 pontot,
3.	Benkő Bálint (H 1)	20 pontot,
4.	Eero Saksman (SF 7)	19 pontot,
5—6.	Taneli Huuskonen (SF 2)	18 pontot,
	Simonyi Gábor (H 6)	18 pontot,
7—8.	M. Riley (GB 7)	17 pontot,
	C. P. Smith (GB 8)	17 pontot,
9—10.	Tardos Gábor (H 7)	16 pontot,
	Umann Gábor (H 8)	16 pontot,
11.	Kiss György (H 5)	15 pontot,
12—13.	C. H. A. Hogben (GB 5)	12 pontot,
	Károlyi Gyula (H 4)	12 pontot,
14—15.	J. M. Edwards (GB 3)	11 pontot,
	Arndt Jonasson (S 2)	11 pontot,
16—17.	G. M. Clemow (GB 1)	10 pontot,
	Hans-Olof Kuylenstierna (S 3)	10 pontot.

A nemzetközi matematikai és fizikai tanulmányi versenyek közös záróünnepélyét Helsinkiben, a Katajanokan Kasinoban rendezték meg július 4-én délben. (Ez az épület annak idején a Finnországban állomásozó orosz cári tisztek klubjául szolgált.) Az ünnepség során az élmezőnyben végzett tanulók értékes ajándékokat kaptak a vendéglátóktól. Érthető tehát, hogy a magyar tanulók az ünnepély befejeztével — hatnapos finnországi tartózkodás után — jó hangulatban indultak haza.

Diákjainknak ezen a versenyen nyújtott teljesítményét azonban semmiképpen sem lenne helyes túlértékelni, hiszen abszolút eredményeik egyáltalán nem mondhatók kiemelkedőnek, azonkívül ez alkalommal a koordináció sem volt olyan szigorú, mint amilyen a nemzetközi matematikai diákolimpiákon szokott lenni. Mindamellett hangsúlyoznunk kell, hogy a körülményekre való tekintettel egyetértünk a mostani koordináció szigorúságának fokával és igazságosnak is tartjuk azt.

Vendéglátóinknak — északi rokonainknak — nagy köszönettel tartozunk ezeknek a nemzetközi tanulmányi versenyeknek gondos megszervezéséért, a tervezett program zökkenőmentes lebonyolításáért és azért a kitüntető bánásmódért, amelyben egész finnországi tartózkodásunk folyamán részesítettek bennünket.

DR. KORÁNYI ERZSÉBET
vezető tanár
Budapest

Felelet a „Kételyek és aggályok"-ra

A Matematika Tanítása 1980. áprilisi, 2. számában jelent meg *Pogáts Ferenc* Kételyek és aggályok című cikke, amelyben a gimnáziumok első osztálya számára írt matematika-tankönyvemről fejti ki véleményét. E cikk hangja és tartalma arra késztet, hogy egészében és részleteiben is a nyilvánosság előtt válaszoljak rá. Attól félek ugyanis, hogy az említett cikk olvasása bizonytalanságot, zavart okozhat azoknak a kartársaknak a körében, akik jelenleg könyvemet egyik fő munkaeszközükként használják.

Pogáts Ferencet nem ismerem; sejtelmem sincs, mi oka lehet arra, hogy gondolatait, bíráló észrevételeit a kinyilatkoztatás szintjén fejtse ki. Ilyen szavakat használ: „vitathatatlanul", „helyrehozhatatlanul", „elfogadhatatlan" stb. — olyan dolgokra, amelyekről nyugodtan vitatkozhatunk, bár elfogadhatók, sőt megfelelnek a matematika és a didaktika

fogalom-, illetve eszközrendszerének. Az esetek legnagyobb részében arról van csak szó, hogy a cikk szerzője mást magyaráz bele egyes mondatokba, mint azoknak a szokásos jelentése, vagy nem veszi figyelembe egyes fogalmak esetén a tankönyvben rájuk adott definíciót.

Bírálatra, még inkább vitára, új tankönyv esetében feltétlenül szükség van. A hivatalos bírálókon kívül a könyv írása során és azóta is sok gyakorló kolléga tette meg vele kapcsolatban észrevételeit. Magam is több hibát észleltem már a megjelenés óta, és *köszönettel veszem minden hozzáértőnek a segítő szavát*, hogy a következő kiadás már a javított változatot tartalmazhassa. Pogáts Ferenc megnyilatkozása teljesen különbözik a többi véleménytől; ő ugyanis a könyv megismerése, alkalmazhatóságának felmérése és saját nézeteinek kifejtése helyett felületesen, *hamis beállításokkal* és *a tudományosság látszatát keltve* ítélkezik.

A cikk sok esetben hivatkozik olyan tankönyvi megállapításokra, amelyek abban nem szerepelnek, „idéz" elő nem forduló mondatokat. Jellemző rá, hogy *általánosként* elemez *konkrét* megállapításokat, *végtelent* képzel *véges számú* helyett, nem veszi tekintetbe a tantervet, az első osztályos tanulók képzettségi szintjét, absztrakciós készségét.

Térjünk rá a részletekre! Pogáts Ferenc pontokba foglalta megjegyzéseit, haladjunk e pontoknak megfelelően!

1. Pogáts Ferenc szerint „nagy tévedés" a tankönyvnek az az állítása, hogy elég ritka az érintőnégyszög. „Indokolása" kétszeresen is hibás:

a) A „ritka" helyett a „kevés" fogalmat cáfolja, ami *a könyvben elő sem fordul*, és a magyar nyelvben nem tekinthető a másik szó szinonímájának. A ritka *relatív*, a kevés *abszolút* összehasonlítást fejez ki, tehát *tartalmában* más.

b) Az analógiaként felhozott példa távolról sem áll analógiában a kritizálttal, mert hiszen itt is *kevés*ről beszél *ritka* helyett, másrészt számok utolsó jegyét (*véges számú* esetet) vizsgál egy félegyenes pontjainak halmaza (*végtelen* halmaz) helyett, végül (és ez a leglényegesebb) a tankönyv példájában a félegyenes minden pontja *azonos* szerepet játszik, a prímszámok utolsó jegyéről azonban semmiféle általános ismeretünk nincsen.

Mi lehet Pogáts Ferencnél a probléma felvetésének forrása? Erre a **2.** pontban részletesen kitérek. Most csak az érintőnégyszögeknél maradva szeretném hangsúlyozni, amit nyilván gyakorló kollégáim is megerősítenek, hogy vannak olyan, gyengébb absztrakciós szinten álló tanulók, akik azt hiszik, hogy amelyik függvény nem páros, az páratlan, amelyik négyszög nem húrnégyszög, az érintőnégyszög stb. Az ő kedvükért tartom fontosnak a megfelelő helyeken annak hangsúlyozását, hogy elképzelésük téves, egy találomra kiválasztott négyszög általában sem nem húrnégyszög, sem nem érintőnégyszög.

2. Pogáts Ferenc írja: „...a szerző... egy halmaz valódi részhalmazáról kijelenti, hogy emez kisebb számosságú, noha ekvivalens azzal", és felsorol nyolc olyan oldalszámot, ahol ez az állítólagos kijelentés található.

Ilyen kijelentés azonban a szóban forgó tankönyvben sem a megjelölt, sem más oldalakon nincs. *Kisebb*, illetve *nagyobb számosság* fogalma sem itt, sem a felsőbb osztályok tankönyveiben nem fordul elő. A tankönyvírást hivatalból irányító, tudományosan képzett szakember tanácsának megfelelően végtelen halmazok összehasonlításakor még a fakultatív csoportok tankönyveiben is megállunk az *ekvivalens—nem ekvivalens* szinten.

Megkerestem azokat a mondatokat, amelyeken Pogáts Ferenc fennakadhatott. Közülük az egyikben (26. oldal) nem matematikai szövegről van szó; itt egy fejezet bevezetőjében köznyelvi szavakkal („egy része", „többsége") emlékeztetek korábbi ismeretekre. Ebbe valóban bele lehet kötni, ha ilyen jellegű szövegben matematikai pontosságot kö-

vetelünk meg. Öt helyen (85., 98., 199., 246. és 329. oldal) a *ritka*, egy helyen (246. oldal) a *valószínű* szó fordul elő. Két esetben (284. és 287. oldal) *szó sincs végtelen halmazokról*, hiszen gyakorlati problémákat elemzünk.

Meglepett, hogy a *valószínű* és a *ritka* szavakról Pogáts Ferenc halmazok számosságára asszociált. A *ritka* szó és ellentéte: a *gyakori* könyvemben mindannyiszor **a relatív gyakoriságra utal.** Még nyilvánvalóbb a *valószínű* szónál, hogy itt, bár a tanulók valószínűségszámításról még nem hallottak, e fogalomkörnek a köztudatban élő fogalmait és köznyelvi formáit alkalmaztam. A köznyelv matematikai precizitása nyilván vitatható, de az említett mondatokba véleményem szerint csak igen furcsa hozzáállással lehet számossági összehasonlításokat belemagyarázni.

Ugyancsak a **2.** pontban „idéz" Pogáts Ferenc egy mondatot: „A körnek kétannyi pontja van, mint a félkörnek, mert az átmérőre tükrözve a félkör pontjainak száma megkettőződik." — Furcsa módon **ez a mondat sem szerepel a tankönyvben.** Nehezen érthető, mi lehetett Pogáts Ferenc célja azzal, hogy ezt leírta és idézőjelbe tette. *Szokatlan módja a kritikának* hibás állításokat kitalálni, azokat idézőjelbe tenni, és a szerzőnek tulajdonítani. Kevés olvasó veszi a fáradságot, hogy ellenőrizze az idézet eredetét, a többiek bizonyára jól szórakoznak a szerző tudatlanságán.

Mi található ezzel szemben a tankönyvben (287. oldal)? Egy *konkrét* szerkesztési feladat „... Szerkesszünk ... olyan pontokat ...!" felszólítással. *Néhány pont* megszerkesztéséről van szó, nem az *összes*, valamely közös tulajdonságú pontéról. Ez utóbbi amúgy is a II. osztály anyagába tartoznék. (A tankönyvben egyébként megkülönböztetjük ezt a két feladattípust; ha az *összes* pontot kérjük, akkor ezt meg is mondjuk.) Konkrét szerkesztést nyilván csak véges sokszor végzünk el, véges számú pontot kapunk, s ezeket tükrözve a kapott pontok száma valóban megkettőződik. — Mellesleg szólva: félkörről szó sem lehetne, mert az adott látószög nem derékszög.

3. Pogáts Ferenc nem vette figyelembe, hogy az általa kifogásolt 283., 284. oldal két, *jól elhatárolt* részből áll: egy bevezető „gyakorlati" problémából és egy matematikai feladatból. A cikk szerzője azt vitatja, hogy a példabeli Annus feltételei rosszabbak Bea feltételeinél.

Valóban van olyan szempont, amely szerint Annus és Bea helyzete egyformának minősíthető. Ez a szempont azonban (vagyis hogy mindkét pontból kontinuumnyi irány vezet a kapuba) a szóban forgó gyakorlati tevékenységet illetően *olyan rossz matematikai modell*, amelyet aligha akarna felhasználni egyetlen futballista is. Pogáts Ferencnek valamilyen okból itt is halmazok számossága jut az eszébe. A kapura rúgás sikerességét azonban minden józan hozzáállás *valószínűségi vizsgálatok* tárgyává tenné, és természetszerűleg a látószöggel hozná kapcsolatba. Melyik edzőnek, játékosnak vagy akár nézőnek lehetne azt bemagyarázni, hogy a pálya minden pontja azonos értékű a góllövés szempontjából?

Mindettől függetlenül újra hangsúlyozom, hogy a Pogáts Ferenc által kifogásolt rész a könyvben egy bevezető probléma, az érdeklődés felkeltését célozza, és utána külön, kiemelten, pontosan kerül megfogalmazásra a matematikai tartalma.

4. A 299. ábrán az egyik alak valóban megfordítva szerepel, mint kellene. Sajnos, ezt a korrektúrán nem vettük észre. Pogáts Ferenc azonban a többinek, a jóknak az elhelyezkedését is kifogásolja. Bizonyos sugallatokat is említ. — Nekem a tankönyv nem „sugall" olyasmit, hogy úszkálással a jobb kezem balkézzé tehető.

5. A valós szám fogalmának kialakítása második osztályos feladat. Előkészítésként, *tájékoztató jelleggel* már az elsős könyvben is foglalkozunk vele. A tizedes

törteknél az általános iskolában megszerzett ismeretekre támaszkodunk. — Pogáts Ferenc szenvedélyesen hiányolja a „vegyes szakaszos tizedes törtek" szerepeltetését. Hosszú tanári pályám során ez a fogalom *sohasem fordult elő a gimnáziumban*, egyik tankönyv sem tartalmazta. Általános iskolában magam is tanítottam, a gimnáziumban azonban nem látom szükségesnek a végtelen szakaszos tizedes törtek két válfajának megkülönböztetését.

Pogáts Ferenc kifogásolja a tankönyv 70. ábráját is. Ez az ábra a tanulók ismereteinek *első osztályos* szintjéhez igazodik, amikor az egészeket és a véges tizedes törteket nem tekintik végtelen tizedes törtnek. A második osztályos tankönyvben továbblépünk ezen a területen, de itt erőltetettnek tartanám a Pogáts Ferenc által helyesnek ítélt út követését.

Pogáts Ferenc „logikailag (többszörösen is!) hibás"-nak ítéli „a $\sqrt{2}$ irracionális voltának az igazolását". — Ismét tévedett! A tankönyv említett részében (116. oldal) vagy másutt **egyáltalán nem szerepel ilyen bizonyítás.** Ott azt bizonyítjuk, hogy a két egységnyi területű négyzet oldalának hossza *nem lehet racionális szám. Nem bizonyítjuk* (éppen azért, mert ezen a szinten korai volna), *csak közöljük, hogy ez a szám irracionális.*

6. A cikk írója szerint a 197. oldalon „felesleges és elhibázott kísérletet" teszek a polinom és a polinomfüggvény definiálására. Hogy mi a szükséges és mi a fölösleges, azt a tanterv és a tankönyv kiadásáért felelős személyek szabják meg. Hogy egy kísérlet elhibázott-e, arról sem helyes ilyen magabiztosan nyilatkozni. Pogáts Ferenc szerint ugyanis a polinomnak „*nem lehet* helyettesítési értékét venni. ... Ennélfogva értelmetlenek a 200—207. oldalakon kiemelten szereplő tudnivalók". — E cikk terjedelme nem engedi meg, hogy részletesen kifejtsem a témát. Röviden: azért használtam a polinom helyettesítési értékének fogalmát, mert ezt igen hasznos fogalomnak tartom, és (amint a tankönyv mutatja) könnyen értelmezhető. Nem én magam találtam ki, hanem a tanárképző főiskolák egyik tankönyvéből, dr. Szendrei János: Algebra és számelmélet (Tankönyvkiadó, Budapest 1975.) c. művéből (124. oldal) vettem át.

Ha pedig elfogadjuk a polinom helyettesítési értékének fogalmát, akkor talán a gimnáziumi tankönyv 200—207. oldalain sem értelmetlen tudnivalókat emeltünk ki.

7. Pogáts Ferenc arra figyelmeztet, hogy „A természetes számok műveleti tulajdonságai *nem* igazolhatók, lévén ezek definitív tulajdonságaik. A 81. oldal ábrái tehát semmit sem igazolnak." S *vajon ez szerepel a tankönyvben? Nem, a tankönyvben ez olvasható:* „E négy tulajdonság *adott számok esetén* könnyen igazolható." S az ábrák azt mutatják, hogy $5+2=2+5$, $4\cdot 3=3\cdot 4$ stb. Milyen alapon marasztal el Pogáts Ferenc ismét olyan dolog miatt, amiről a tankönyvben szó sincs? Vagy ezen a szinten az sem igazolható, hogy $5+2=2+5$?

8. Ebben a pontban a cikk szerzője sok kifogását olyan sűrítve sorolja fel, hogy több esetben azt sem tudom, vajon mire is gondolhatott. Szerepelnek itt jogos kifogások is (amelyeket már hónapok óta ismerünk és javításra korábban le is adtunk a nyomdának): például valóban hiányos az ellipszis és a hiperbola definíciója; zavaró, hogy a trapéz középvonalai közül csak az egyiket illetjük ezzel a névvel; a nyitott mondatot alapfogalomnak tekintjük, de nem sikerült kellőképpen a körülírása stb. A cikkben felsorolt sok oldalszám azonban csak zavarokat támaszt, mert a legtöbb esetben nem lehet tudni, mit kellene ott észrevennünk.

Egy részletre azonban még kitérek. „... Az $\frac{1}{x} \leqq \frac{1}{x}$ és a $0 \leqq 0$ ekvivalensek lesznek?" — kérdezi Pogáts Ferenc.

Vagyis nem veszi észre, hogy ekvivalenciára vonatkozó kérdést, ahogy ez a matematikában általában szokásos, *csak adott kiindulási halmazra vonatkoztatva* teszünk fel, ezért a feltett kérdés önmagában, a mi feldolgozásunkban, értelmetlen.

Szerepelnek még a cikkben nyelvi, didaktikai stb. megjegyzések, amelyekről valóban lehetne vitatkozni. A jelölésrendszerrel. Pogáts Ferenc nem száll vitába, hanem egy kétszavas gúnyos kitétellel illeti. Pedig úgy érzem, hogy sikerült a középiskolába adaptálnom azokat a jelöléseket, amelyek valóban megfelelnek a fogalmak tartalmának, és nem a 100—200 évvel ezelőtti, másféle értelmezést tükrözik.

Sokan vagyunk (tanárok, gyakorló iskolai vezető tanárok, felsőfokú oktatási intézmények egyes oktatói stb.), akik életünket a matematika *oktatására* tettük fel, és a tudományok terén legfeljebb az egyetemi doktori címig vagy még addig sem jutottunk el. Úgy gondolom, hogy közülünk a közös célok elérését bárki oly módon segítheti a legjobban, ha a többiek munkáját tárgyilagosan, segítőkészen értékeli, és nem akar egyszemélyes bíróságot alkotni, ahol ő maga az ügyész, aki vádol, a tanú, akitől távol áll a hitelesség és a bíró, aki „felment".

Az elmúlt évek pályázatai mindenkinek lehetőséget adtak arra, hogy részt vállaljon az új tankönyvek elkészítéséből. Jó lett volna, ha mindazok, akikről mostanában derül ki, hogy milyen határozott elképzelésekkel rendelkeznek a tananyag feldolgozását illetően, vállalták volna a mások nézeteivel való összehasonlítást, és maguk is pályáztak volna. A tankönyvírásra az I. osztályos tankönyvpályázat első díjának elnyerése után kaptam megbízást, a felsőbb osztályok tankönyveinek megírására pedig azért kértek fel, mert az értékelő bizottság nem talált első díjas munkát a további pályázatokra benyújtottak között. A megbízásnak igyekszem legjobb tudásom szerint eleget tenni, ötödik éve egyfolytában dolgozom, öt gimnáziumi tankönyvet, két munkafüzetet és egy tanári kézikönyvet készítettem el. A munka befejezéséhez (még egy tankönyv és egy tanári kézikönyv van hátra) sok segítségre, de elsősorban tárgyilagos és jóhiszemű értékelésekre van szükségem. Szerencsére sok olyan kolléga van az országban, akitől ezt meg is kaphatom.

BEREZNAI GYULA—DR. VARECZA ÁRPÁD
főiskolai tanár főiskolai docens
Nyíregyháza

Megjegyzés egy versenyfeladathoz

A tanárképző főiskolák matematikaszakos hallgatói számára 1979-ben megrendezett feladatmegoldó versenyen az első feladat a következő volt ([8]):

„Hányféleképpen helyezhető el 2 piros, 5 kék és 5 zöld golyó egy ikozaéder (szabályos húszlap) csúcsaiba, ha nem tekintünk különbözőnek olyan két elhelyezést, amelyek az ikozaéder elforgatásával egymásba vihetők át?"

Ilyen típusú feladatok elég gyakran fordulnak elő különböző példatárakban másmás szabályos testekre és más színkombinációval megfogalmazva is (pl. [3] 310., 311. és 313. feladata, [4] 42. feladata stb.), ezért érdemes megjegyezni, hogy az effajta feladatok megoldásai PÓLYA GYÖRGY ([1], [6] 115—119. oldal, [7] 28. oldal) következő két tételének alkalmazását jelentik:

1. tétel:

Legyen adott n tárgy és m szín, és jelölje az n tárgy egy permutációcsoportját G,

továbbá $P(G\colon x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a G csoport ún. ciklusmutató polinomját, amely definíció szerint

$$P(G\colon x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{\lambda_1(g)} \cdot x_2^{\lambda_2(g)} \ldots x_n^{\lambda_n(g)},$$

ahol $\lambda_i(g)$ jelöli a g permutálás i hosszúságú ciklusainak számát!

Ekkor a G szerinti színezések száma

$$P(G\colon \underbrace{m, m, \ldots, m}_{n\text{-szer}}).$$

2. tétel:

A G szerinti olyan színezések száma, amelyek k_i számú a_i színű tárgyat tartalmaznak:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\substack{\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} i\lambda_i = n}} h_G(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, p_{k_1, \ldots, k_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

ahol $h_G(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ jelöli azoknak a permutációknak a számát, amelyekben λ_i számú i hosszúságú ciklus van, $p_{k_1, \ldots, k_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ pedig azoknak a színezéseknek a számát, amelyek az a_i színt k_i-szer használják fel és a ciklusokon állandók (azonos színűek).

A versenyen kitűzött feladat nyilván a **2. tétel** alkalmazását jelenti. Az ikozaéder ciklusmutató polinomja

$$P(G\colon x_1, \ldots, x_{12}) = \frac{1}{60}(x_1^{12} + 24x_1^2x_5^2 + 20x_3^4 + 15x_2^6),$$

ezért a keresett színezések száma:

$$\frac{1}{60}\left(\frac{12!}{2!5!5!} \cdot 1 + 24 \cdot 2 + 20 \cdot 0 + 15 \cdot 0\right) = 278,$$

mivel esetünkben ciklusokon állandó színezés csak akkor létesül, ha g tizenkét 1 hosszúságú ciklusból — ezek száma $\frac{12!}{2!5!5!}$ — vagy két 1 és két 5 hosszúságú ciklusból — ezek száma 24 — áll. Az első esetben 1, a másodikban 2 színezés tartozik hozzájuk.

A következőkben megadjuk a feladat megoldását úgy, hogy annak gondolatmenete követni fogja a fenti két tétel bizonyításának gondolatmenetét.

Jelölje az ikozaéder csúcsainak halmazát X, és legyen — az egyszerűség kedvéért —

$$X = \{1, 2, \ldots, 12\}.$$

Azok a forgatások, amelyek csúcsokat csúcsokba visznek át, az X halmaz elemeinek permutációival jellemezhetők, és ezek a forgatások csoportot alkotnak. Jelölje ezt a csoportot G. Igazoljuk, hogy:

1. Az identikus leképezés G-hez tartozik (és 12 egyelemű ciklusból áll, amit a ciklusmutató polinomban x_1^{12} jelöl).

2. Ha a forgástengely két szemközti csúcson halad át, akkor a megfelelő permutációk két 1 hosszúságú és két 5 hosszúságú ciklusból állnak. Mivel a csúcsok száma 12, ezért a tengely hatféleképpen választható, és mindegyikhez négy forgás tartozik, ezért az ilyen permutációk száma 24 (a ciklusmutató polinomban ezt $24x_1^2x_5^2$ jelöli).

3. Ha a forgástengely szemközti lapok középpontjain halad át, akkor — mivel a lapok száma 20 — a tengely tízféleképpen választható, és a megfelelő permutációk négy 3 hosszúságú ciklusból állnak, de mindegyikhez két forgás tartozik, ezért az ilyen permutációk száma 20.

4. Ha a tengely két szemközti párhuzamos él felezőpontján halad át, akkor a megfelelő permutációk hat 2 hosszúságú ciklusból állnak, és mivel az élek száma 30, ezért a tengely 15-féleképpen választható, tehát az ilyen típusú forgatások száma 15.

Összeadva az egyes esetekben kapott permutációk számát,

$$|G| = 1+24+20+15 = 60$$

adódik, és éppen ezt akartuk igazolni.

Jelölje a továbbiakban G elemeit g_i $(i=1, 2, \ldots, 60)$. Az ikozaéder csúcsainak színezésére 2 piros, 5 kék és 5 zöld színt használhatunk fel. Jelöljük a csúcsok egy tetszőleges ilyen színezését f-fel és a színezések halmazát F-fel! Nyilvánvaló, hogy

$$|F| = \frac{12!}{2!\,5!\,5!} = 16\,632,$$

mert az X halmaz ennyiféleképpen képezhető le a színek halmazára. Ezek között a színezések között azonban vannak olyanok, amelyek forgatással egymásba vihetők át. Azt mondjuk, hogy egy f_1 színezés ekvivalens egy f_2-vel, ha van olyan $g \in G$, amellyel $f_1 g = f_2$. Azt, hogy f_1 ekvivalens f_2-vel, jelölje $f_1 \varrho f_2$.

A színezések F halmazán a ϱ valóban ekvivalencia-reláció, hiszen ϱ

a) reflexív, azaz $f \varrho f$ minden $f \in F$-re (amikor is g az identikus leképezés),

b) szimmetrikus, mert ha $f_i \varrho f_j$, akkor $f_j \varrho f_i$, hiszen ha valamely g-vel $f_i g = f_j$, akkor $f_i = f_j g^{-1}$ és $g^{-1} \in G$; végül

c) tranzitív, azaz ha $f_i \varrho f_j$ és $f_j \varrho f_k$, akkor $f_i \varrho f_k$ is teljesül; ugyanis ha $f_i g_1 = f_j$ és $f_j g_2 = f_k$, akkor $f_i g_3 = f_k$, hiszen

$$f_i g_1 g_2 = f_k$$

és $g_1 g_2 = g_3 \in G$. Nyilvánvaló, hogy feladatunk a ϱ relációhoz tartozó osztályok számának meghatározása.

Legyen

$$fG = \{fg_1, fg_2, \ldots, fg_{60}\},$$

ahol f egy tetszőleges színezés. Az fG elemei nyilván egy osztályba tartoznak, és rajtuk kívül más színezést nem tartalmazhat ez az osztály, mert ha egy $f^* \notin fG$ és — mondjuk $f^* \varrho f$, akkor definíció szerint lenne olyan $g \in G$, amellyel $fg = f^*$, azaz $f^* \in fG$ lenne, ami ellentmond feltevésünknek. Ezek szerint egy osztálynak legfeljebb 60 eleme lehet.

Vegyünk ezek után egy tetszőleges f_1 színezést, és képezzük az $f_1 G$ osztályt! Hagyjuk el az F-ből az $f_1 G$ elemeit, és tekintsünk egy tetszőleges f_2 színezést, amelyre $f_2 \in F$ és $f_2 \notin f_1 G$. Képezzük az $f_2 G$ osztályt, majd hagyjuk el F-ből ennek az osztálynak az elemeit is, s folytassuk ezt így tovább! Ily módon végül az F minden eleme belekerül valamelyik osztályba, és — az előzők szerint — ezek az osztályok diszjunktak. — Vizsgáljuk ezeknek az osztályoknak a számosságát!

Azt igazoljuk először, hogy ha f olyan színezés, amely nem állandó g ciklusain, akkor $fg \neq f$. Valóban: ha g egy $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ ciklusa olyan, amelynek elemei az f színezéskor nem azonos színűek, akkor tegyük fel — ezt megtehetjük —, hogy i_j színe piros, i_{j+1} színe pedig — mondjuk — kék! Ez esetben

f-ben i_j színe piros, i_{j+1} színe kék,
fg-ben i_j színe kék,
ami azt jelenti, hogy $f \neq fg$ (a g az j-t átviszi $(j+1)$-be).

Ezek után megállapítjuk az egyes osztályok számosságát.

I. Ha egy osztály nem tartalmaz olyan színezést, amely valamely $g \in G$ ciklusain állandó, akkor — az előzők szerint — a megfelelő osztály minden eleme különböző, ezért számossága 60. Legyen az ilyen típusú osztályok száma K.

II. Ha az osztály tartalmaz olyan színezést, amely valamely $g \in G$ ciklusain állandó, akkor az a g-beli elem csak olyan lehet — mivel 2 piros, 5 kék és 5 zöld színt használhatunk —, amely két egyelemű és két ötelemű ciklusból áll. Ekkor viszont 4 forgatással ugyanahhoz a színezéshez jutunk, és — szintén az előbb bizonyítottak szerint — az összes többi különböző, ezért az ilyen típusú osztályok $60-4=56$ elemet tartalmaznak. Az ilyen típusú osztályok száma azonban 12, mert a forgástengely hatféleképpen választható, és egy-egy ilyenhez két színezés tartozik: az egyik ötelemű ciklus ugyanis kék, a másik pedig zöld vagy fordítva. Ezért

$$16\,632 = K \cdot 60 + 12 \cdot 56,$$

azaz $K=266$, amiből az osztályok számára 278 adódik, és ez feladatunk megoldása.

Végezetül megadjuk a többi szabályos test ciklusmutató polinomját is, így egy színezési probléma felvetődése esetén csak bizonyos behelyettesítéseket kell elvégezni. — A szabályos testek adatai:

Elnevezés	Csúcsok száma	Élek száma	Lapok száma	
Tetraéder (T)	4	6	4	(háromszög)
Hexaéder (H)	8	12	6	(négyzet)
Oktaéder (O)	6	12	8	(háromszög)
Dodekaéder (D)	20	30	12	(ötszög)
Ikozaéder (I)	12	30	20	(háromszög)

A ciklusmutató polinomok (ahhoz hasonlóan kaphatók, ahogyan az ikozaéder esetében megmutattuk):

$$P_T(G\colon x_1, \ldots, x_4) = \frac{1}{12}(x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2);$$

$$P_H(G\colon x_1, \ldots, x_8) = \frac{1}{24}(x_1^8 + 8x_1^2x_3^2 + 6x_4^2 + 9x_2^4);$$

$$P_O(G\colon x_1, \ldots, x_6) = \frac{1}{24}(x_1^6 + 6x_1^2x_4 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_2^3 + 8x_3^2);$$

$$P_D(G\colon x_1, \ldots, x_{20}) = \frac{1}{60}(x_1^{20} + 20x_1^2x_3^6 + 24x_5^4 + 15x_2^{10});$$

$$P_I(G\colon x_1, \ldots, x_{12}) = \frac{1}{60}(x_1^{12} + 24x_1^2x_5^2 + 20x_3^4 + 15x_2^6).$$

Megjegyezzük még, hogy jóllehet a megoldás egyetlen lépése sem tételezett fel a főiskolai tananyagon túlmenő ismereteket, az — érthetően — igen nagy problémát okozott a versenyzőknek.

IRODALOM

[1] *Pólya, G.:* Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Grafen und chemische Verbindungen. Acta Math. 68. (1937) 145—254. oldal.
[2] *Rédei, L.:* Algebra. Akadémiai Kiadó, Budapest 1954.
[3] *Vilenkin, N. J.:* Kombinatorika. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1971.
[4] *Steinhaus, H.:* One hundred problems in elementary mathematics. Pergamon Press, Oxford—London—New York—Paris 1963.
[5] *Hajós, Gy.:* Bevezetés a geometriába. Tankönyvkiadó, Budapest 1960.
[6] *Tomescu, I.:* Kombinatorika és alkalmazásai. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1978.
[7] *Lovász, L.:* Combinatorial Problems and Exercises. Akadémiai Kiadó, Budapest 1979.
[8] *Sebestyén, J.:* Beszámoló a Tanárképző Főiskolák 1979. évi Országos Matematikai Versenyéről. A Matematika Tanítása 1980/1., 13-20. oldal.

DR. SCHARNITZKY VIKTOR
főiskolai tanár
Budapest

Matematikus vándorgyűlés Salgótarjánban

A Bolyai János Matematikai Társulat a sorrendben 20. RÁTZ LÁSZLÓ vándorgyűlést 1980. július 8-tól 11-ig rendezte meg Salgótarjánban több, mint 350 résztvevővel. A vándorgyűlés keretében szervezett felsőoktatási ankéton további 100 felsőoktatási szakember vett részt.

A vándorgyűlést *Surányi János*, a BJMT elnöke nyitotta meg, majd *Fekete Nándor*, Salgótarján város Tanácsának elnöke üdvözölte a vándorgyűlés résztvevőit. A tanácselnök szavai után *Hódi Endre* emlékezett meg a vándorgyűlés névadójának munkásságáról.

Ezután *Surányi János* átnyújtotta az idei BEKE MANÓ emlékdíjakat. A matematika oktatása és népszerűsítése érdekében végzett kimagasló munkájáért a Beke Manó Emlékdíj Bizottság 1980-ban a Beke Manó emlékdíj első fokozatában részesítette

Pálmay Lórántot, a Fővárosi Pedagógiai Intézet vezető szakfelügyelőjét.

Az emlékdíj második fokozatában az alábbi tagtársak részesültek:

Bogdán Zoltán, Pest megyei középiskolai matematika szakfelügyelő,
Danyi Istvánné, a salgótarjáni Petőfi Sándor Általános Iskola tanítója,
Előd Istvánné, a Tankönyvkiadó Vállalat felelős szerkesztője,
Kovács Csongorné, a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Iskola vezető tanára,
Kőhídi Tiborné, a budapesti Tárnok utcai Általános Iskola tanítója.

Az emlékdíjak átadása után az Állami Díjjal kitüntetett **Gyires Béla** és **Varga Tamás** tagtársak *Vallomások a matematikáról* címmel tartottak életbeszámolót.

A délutáni plenáris ülésen **Petruska György** *Euler és a divergens sorok* című előadása hangzott el.

A vándorgyűlés résztvevői a következő három napon 3 szekcióban folytatták a tanácskozást. Az egyes szekciókban a következő előadások hangzottak el:

ALSÓ TAGOZATI SZEKCIÓ

Varga Tamás: *A matematika egysége;*
Andrásfai Béla: *Séta gráfokban;*
Szeszler Anna: *A 3. osztályos matematikaanyag egy témájának megtervezése;*
Kőhídi Tiborné: *A 4. osztályos matematikaanyag egy témájának megtervezése;*
Ill Mártonné: *Honnan hová jutunk el a 4. osztályos matematikaanyagban?*
Danyi Istvánné: *Hogyan oldottunk meg szöveges feladatokat a 4. osztályban?*
Kőhídi Tiborné: *A 3. és 4. osztályos tankönyv használatáról.*

FELSŐ TAGOZATI SZEKCIÓ

Pogáts Ferenc: *Geometriai szemlélet és gondolkodásra nevelés;*
Erdős Pál: *Geometriai problémákról* (a középiskolai szekcióval közösen);
Kovács Zoltán: *Programozható kalkulátorok;*
Pálmay Lóránt: *Mit vár a középiskola az általános iskola matematikatanításától?*
Radnainé Szendrei Julianna: *A valószínűségről;*
Kovács Csongorné—Sztrókay Kálmánné: *Ankét az új 6. osztályos tankönyvről és munkalapokról;*
Szendrei János: *Tipushibák az új tanterv tanításában.*

KÖZÉPISKOLAI SZEKCIÓ

Horváth Jenő: *A nem-euklidészi geometria elemei a középiskolai matematika-tananyagban;*
Erdős Pál: *Geometriai problémákról* (a felső tagozati szekcióval közösen);
Beck József: *Amőba-játékok;*
Bognár Jánosné: *Véletlen játékok;*
Császár Ákos: *A matematikai jelölések* (a felsőoktatási szekcióval közösen);
Pintér Lajos: *Az analízis oktatásának néhány problémájáról;*
Korányi Erzsébet—Pálfalvi Józsefné: *Analízis a középiskolák III. osztályos tankönyveiben.*

A vándorgyűlés keretében a BJMT ankétot szervezett a felsőoktatás néhány időszerű poblémájáról. A tanácskozás két szekcióban folyt. Az A szekcióban a tanárképző felsőoktatási intézmények, a B szekcióban a műszaki jellegű felsőoktatási intézmények oktatói vitatták meg az alábbi témákat (zárójelben a vitaindító előadók szerepelnek):

A SZEKCIÓ

A matematikatanár-képzés strukturális problémái **(Szendrei János),**
A matematikaoktatás módszertani kérdései a tanárképzésben **(Pósa Lajos).**
A tanítási gyakorlatra való felkészítés kérdése **(Kántor Sándorné).**

B SZEKCIÓ

A számítástechnika oktatásának problémái **(Lőcs Gyula, Havas Iván, Klafszki Emil).**
A matematikaoktatás módszertani kérdései **(Scharnitzky Viktor, Rózsa Pál, Szilvainé Pósa Annamária).**
A főiskolai matematikaversenyek kérdése **(Paál Györgyné).**
A tudományos kutatás problémái a matematika tanszékeken **(Vincze Endre).**

A FELSŐOKTATÁSI SZEKCIÓK és a KÖZÉPISKOLAI SZEKCIÓ közös rendezvénye:
A matematikai jelölések **(Császár Ákos).**

A vándorgyűlés tervezett programján felül **Hódi Endre** beszámolt a Finnországban rendezett nemzetközi matematikai tanulmányi versenyről (idén nem volt Nemzetközi Matematikai Diákolimpia), ahol Magyarország csapata első helyezést ért el, továbbá arról az amerikai matematikai tesztvizsgáról, amelyen magyar diákok is részt vettek.

Az előadások szünetében és a szabad időben értékes beszélgetésekre és termékeny eszmecserékre került sor.

A szakmai rendezvényeken kívül a vendéglátók és a szervezők számos szórakoztató programról is gondoskodtak. A hangulatos közös vacsora és tombola, a Nógrád megyei nevezetességeket bemutató filmek vetítése, a Szécsénybe és Hollókőre, illetve

a Somoskőre szervezett kirándulások, nem utolsósorban pedig a kitűnő ellátás kellemes emlékeket hagyott a résztvevőkben. A vándorgyűlés alkalmából jelent meg a **HÍRHARANG** 4. száma, amelyben sok értékes és érdekes információ kapott helyet.

Az 1981. évi vándorgyűlést előreláthatólag Miskolcon rendezi meg a BJMT.

FELADATOK

Rovatvezető: Pogáts Ferenc.

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor u. 10., II. 10., 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze, és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: a lap kézbesítésétől számított 20. nap.

939. Tekintsük az összes olyan egyenest, amely az

$$y = 2x^4 + 7x^3 + 3x - 5$$

egyenletű görbét négy különböző $(x_i;\ y_i)$ $(i=1, 2, 3, 4)$ pontban metszi! Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$$

értéke nem függ az egyenes megválasztásától!

940. Legyen A_n az n-nél kisebb, n-hez relatív prím, pozitív egész számok halmaza! Melyek azok a pozitív egész n-ek, amelyekre A_n elemei számtani sorozat egymást követő elemei?

941. Legyen H véges halmaz! Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = (2^k - 1) \sum |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k|,$$

ahol az összegezés kiterjed valamennyi $A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq H$ választásra! Az $|S|$ az S halmaz számosságát jelöli.

942. A teniszben minden labdamenet azzal végződik, hogy a két játékos egyike pontot szerez. *Játékot* az nyer, aki előbb szerez legalább négy pontot úgy, hogy ellenfelének ugyanakkor még legalább kettővel kevesebb pontja van. *Játszmát* az nyer, aki előbb nyer legalább hat játékot úgy, hogy ellenfelének addig legalább kettővel kevesebb játékot sikerült nyernie. Egy játszma során a nyertes félnek az összes pontnak legalább hány százalékát kell elnyernie?

943. Egy szabályos háromszöget hogyan kell egy egyenesmenti vágással két olyan darabra vágni, hogy e darabokból maximális átmérőjű konvex alakzatot nyerjünk? (Konvex alakzat átmérőjén az alakzat pontpárjai távolságának szuprémumát értjük.)

944. Melyek azok a síkbeli négyszögek, amelyeknek a csúcsain átmenő négy (nem feltétlenül különböző), a kerületet felező egyenes egy ponton halad keresztül?

4,50 Ft

Helyreigazítás

Lapunk ez évi 4. számában a 111. oldalon a **„Matematikatanárok versenyé"-nek 1979. évi győztesei** című közleményben sajnálatos sajtóhiba csúszott: ugyanis **Szánthó Gyula**, a gyulai Kertészeti Szakközépiskola tanára a szóban forgó versenyen nem III., hanem **II. díjat** nyert.

A sajtóhibáért Igen tisztelt Olvasóink szíves elnézését kérjük — elsősorban természetesen a személyében érintett Olvasónkét.

A szerkesztőség

Javasolt szakirodalom

a Tankönyvkiadó kiadványai közül

Fűzve

Dr. Kőhegyiné—Vajda: *Egyéni matematikatanulás osztályközösségben.* Feladatgyűjtemény tanárok számára az általános iskola 8. osztályának matematikaoktatásához (52 681) ..... 16,—

Hámori: *Ismerkedés a komputerrel.* Számítástechnika I. az általános és középiskolai tanulók számára (29 205) ..... 10,—

Kovács Gy.: *Számítógépek technikája.* Számítástechnika III. (29 217) 15,50

Élő matematika 1. Tanulmányok. Szerkesztő: Gádor Endréné (92 347/1) ..... 18,—

Jánossy—Tasnádi: *Élő matematika 2. Valószínűségszámítás* (92 357/2) 6,0

Gergely—Hódi és mások: *Élő matematika 3. A lánctörtektől a számítógépig* (92 347/3) ..... 13,—

Korányi: *Élő matematika 4. Használjuk a differenciálszámítást!* (92 347/4) 18,50

Kovács M.: *Néhány kibernetikai játékgép.* Bevezetés az automaták tervezésébe (29 184) 11,50

Ligeti—Mosoni: *Törd a fejed, érdemes!* Matematika feladatgyűjtemény az általános iskolai tanulók számára (1908/1) ..... 10,—

Felvételi feladatok: matematika, fizika, szabadkézi rajz. Szerkesztette: Pálfai Pál (81 159/1) ..... 108,—

Dr. Scharnitzky Viktor: *Egyetemi felvételi feladatok matematikából, 1974—1976.* IV. kötet (8158/IV) 18,50

Péter Rózsa: *Játék a végtelennel. Matematika kívülállóknak* (52 489) ..... 31,—

Vigassy L.: *Egybevágósági transzformációk a síkban és a térben* (29 247) 9,50

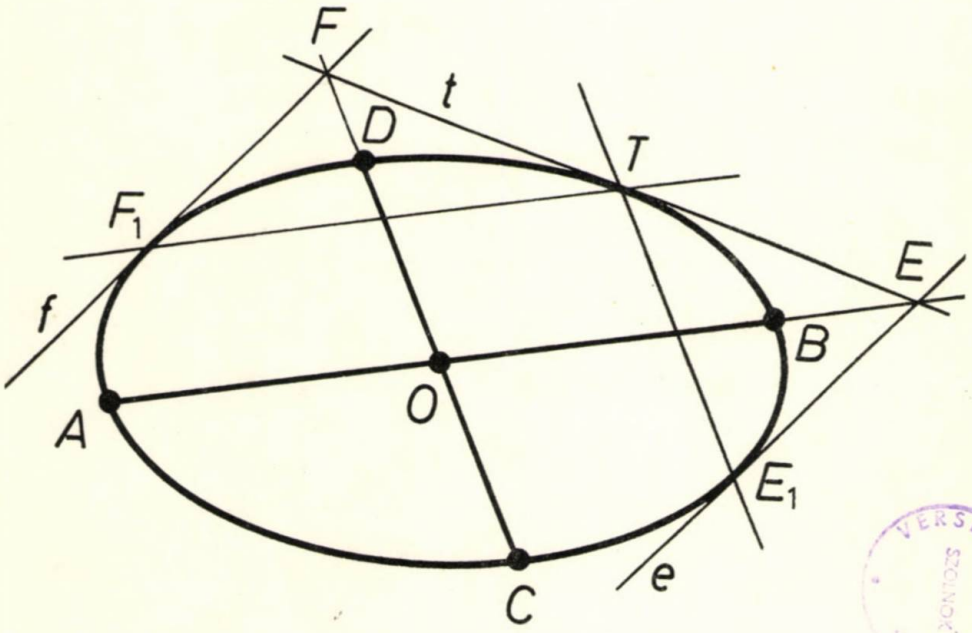
Beszerezhető

a 17. Pedagógus-könyvesboltban (1053 Bp., Múzeum krt. 3.),
a 44. Könyvesboltban (1052 Bp., Deák F. u. 15.)

INDEX: 25 565

A Matematika Tanítása

A Művelődési Minisztérium és a Bolyai János Matematikai Társulat módszertani folyóirata



VERSEGHY KÖNYVTÁR SZOLNOK

1980. december * XXVII. évfolyam 6 szám

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

A MŰVELŐDÉSI MINISZTÉRIUM ÉS A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT MÓDSZERTANI FOLYÓIRATA

FELELŐS SZERKESZTŐ:
HÓDI ENDRE

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

ÁCS PÁL, BEREZNAI GYULA, BIGE ISTVÁNNÉ, ELŐD ISTVÁNNÉ, KOVÁCS LÁSZLÓ, KOVÁCS ZOLTÁN, NÉMETHY KATALIN, NYILAS DEZSŐ, PÁLMAY LÓRÁNT, DR. PELLER JÓZSEF, REMÉNYI GUSZTÁV, REMÉNYI GUSZTÁVNÉ

Szerkesztőség: 1071 Budapest, Gorkij fasor 17—21.
Telefon: 211-200
80-3602 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

A KIADÁSÉRT FELELŐS
A TANKÖNYVKIADÓ IGAZGATÓJA

Terjeszti a Magyar Posta

ISSN 0461—3902

Előfizethető a hírlapkézbesítő postahivatalokban és a Posta Központi Hírlap Irodában (postacím; Budapest V., József nádor tér 1. — 1900) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámlára. Előfizetési díj egész évre 27,— Ft. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban. Példányonkénti eladási ár: 4,50 Ft.

Kérjük a kartársakat, hogy közlésre szánt cikkeiket gépelve, két példányban küldjék be a szerkesztőség fenti címére A papírlapnak csak egyik oldalára, kettes sortávolsággal, egy-egy oldalra 30 sort gépeljenek! A sor hossza 66 betűhely Közöljék lakásuk és munkahelyük pontos címét is!

TARTALOM

Dr. Horváth Jenő: A nem-euklideszi geometria elemei a középiskolában I. 161

Rácz János: Egy érettségi feladat ürügyén (Megjegyzések a trigonometrikus egyenletek tanításáról) 168

Tomori Ilona: A racionális számok összeadásának és kivonásának tanítása az általános iskola 6. osztályában 182

FELADATOK 185

СОДЕРЖАНИЕ

Д-р Хорват Ене: Элементы неэуклидисской геометрии в средней школе I. ... 161

Рац Янош: По поводу задачи на аттестат зрелости. (Замечания в связи с преподаванием тригонометрических уравнений) 168

Томори Илона: Преподавание сложения и вычитания рациональных чисел в 6-ом классе восьмилетней школы 182

ЗАДАЧИ 185

INHALT

Dr. Horváth, Jenő: Die Elemente der nichteuklidischen Geometrie in den Mittelschulen I. 161

Rácz, János: Unter dem Vorwand einer Reifeprüfungsaufgabe (Bemerkungen zum Unterricht der Trigonometrischen Gleichungen) 168

Tomori, Ilona: Der Unterricht der Addition und Subtraktion rationaler Zahlen in der 6. Klasse der Grundschulen 182

AUFGABEN 185

DR. HORVÁTH JENŐ
tanszékvezető egyetemi docens
ELTE TTK
Budapest

A nem-euklideszi geometria elemei a középiskolában I.

1. „A matematikatanítás célja, hogy megismertesse a valóság leggyakoribb mennyiségi és térbeli viszonyait és formáit, szilárd, alkalmazásra kész ismereteket adjon, fejlessze a matematikai gondolkodást és ezzel a logikus gondolkodás általános kultúráját, helyes képet alakítson ki a matematikáról mint alapvető tudományról, s mindezekkel járuljon hozzá a dialektikus materialista világnézetre való neveléshez és a személyiségformáláshoz." (Lásd [1] 369. oldal!)

Egyetértve a célmeghatározással, úgy vélem, hogy a jelenlegi geometriai tananyag a fenti követelményeknek csak részben felel meg. Nem-euklideszi geometriáról még a jobb tanulók is keveset hallanak. Ennek a cikknek célja annak megmutatása, hogy a rendes tanítási órákon is beszélhetünk nem-euklideszi geometriáról, hiszen tanítjuk vagy kis módosítással taníthatnánk. Természetesen a tanórán kívül, szakköri foglalkozásokon is van lehetőség a nem-euklideszi geometria elemeivel foglalkozni. A következő 3 témát lehetne javasolni, ezekkel a cikkemben nem foglalkozom.

1.1. Szférikus geometria elemei. Szakkörön megoldani [8] 1891—1925. feladatát, triéder helyett gömbháromszöget mondunk. Kidolgozni a gömbi trigonometriát stb.

1.2. [9] alapján elemi geometriát csinálni a Poincare-féle félgömbmodellen.

1.3. [2] (3—25. oldal) alapján szakkörön foglalkozhatunk a geometria fejlődésével, a párhuzamossági axiómát helyettesítő axiómákkal, Legendre szögtételeivel stb.

2. Cikkemben megvizsgálom, hogy a középiskolában jelenleg tanított euklideszi geometria tartalmaz-e nem-euklideszi tételeket. Nem-euklideszi geometrián — cikkemben — a szférikus és a hiperbolikus geometriát értem. A szakirodalomban a szférikus, az euklideszi és a hiperbolikus geometriát közös néven állandó görbületű terek geometriájának nevezik. A tételek, feladatok — ha külön nem jelzem — az euklideszi, a szférikus és a hiperbolikus geometriában értendők.

A következőkben az iskolában tanított geometriai tételeket, feladatokat három csoportba osztom.

2.1. *A tételek, a feladatok állításai és bizonyításuk mind a három geometriában érvényesek.*

2.2. *A tételek, a feladatok állítása mindhárom geometriában igaz, de az iskolában vett bizonyítás euklideszi.*

2.3. *A feladatok, a tételek állításait átfogalmazzuk. Az átfogalmazott tétel magába foglalja az euklideszi esetet is.* Olyan bizonyítást adunk, amely mindhárom geometriában érvényes és egyszerű. Mint látni fogják, a bizonyításnál nem használom az euklideszi sík párhuzamossági axiómáját vagy azzal ekvivalens tételeket. Ilyenek:

a) A háromszög szögeinek összege π.

b) A háromszög külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével.

c) A sík egy adott egyenese által határolt egyik félsíkban az egyenestől egyenlő távolságra levő pontok egy egyenesen vannak.

d) Három pont vagy egy körön, vagy egy egyenesen van.

Könnyen bizonyítható, hogy a fent említett bármely tétel ekvivalens az euklideszi sík párhuzamossági axiómájával. Nem elemzem a középiskolában szereplő geometriai tananyagot, csak részeket emelek ki. Egy részletes elemzés egyrészt a cikk terjedelme miatt sem lehetséges, másrészt ennek alapján bárki elvégezheti.

2.1. Ismert, hogy a tengelyes tükrözés mindhárom geometriában létezik, és tulajdonságai is ugyanazok. Ezért a tengelyes tükrözés segítségével bizonyítható tételek, feladatok érvényesek mindhárom geometriában. A következőkben felsorolom ezeket a tételeket. Ott teszek megjegyzést, ahol a tankönyvekben találtakhoz viszonyítva eltérés van, vagy megjegyzés szükséges.

2.1.1. *A szakaszfelező merőleges és szögfelező egyenes jól ismert tulajdonsága, hogy pontjai a szakasz két végpontjától, illetve a szög két szárától egyenlő távolságra vannak.* (Megfordítás később.)

2.1.2. *Az egyenlő szárú háromszög tulajdonságai:* az alapon levő szögek egyenlők, a szögfelező merőlegesen felezi az alapot stb. (Természetesen a szögek összegéről semmit sem mondunk.) Bizonyításuk a szárszög szögfelezőjére való tükrözéssel történik.

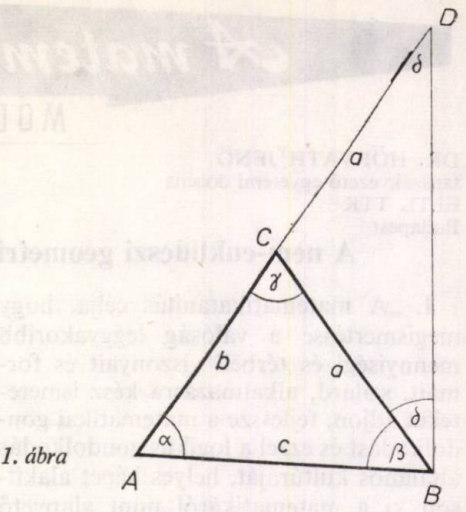
2.1.3. *Szabályos háromszögek tulajdonságai.*

2.1.4. *A* **2.1.2.** *és* **2.1.3.** *tételek megfordításai.*

2.1.5. *Bármely háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van.* A bizonyítás menete hiperbolikus esetben ugyanaz, mint a tankönyvben [4], [6], mert a háromszög külső szöge nyilván nagyobb, mint bármelyik nem mellette fekvő belső szög. Szférikus esetben ez nem igaz, ezért a bizonyítás külön meggondolást igényel (l. [8] 1894. feladat!).

2.1.6. *Bármely háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik.* A bizonyítás indirekt úton történik, ahogy szoktuk.

2.1.7. *A háromszögben bármely két oldal összege nagyobb a harmadik oldalnál.* Bizonyítás (az 1. ábra jelöléseivel) a



1. ábra

2.1.6. tétel felhasználásával ($\beta+\delta>\delta$). Lényeges, hogy a BCD háromszögben B-nél és D-nél nem $\frac{\gamma}{2}$ nagyságú szög van, hanem egyenlő (δ) szögek vannak.

2.1.8. *A szakaszfelező merőlegesre és szögfelező egyenesre vonatkozó* **(2.1.1.)** *tételek megfordításai,* továbbá hogy pl. az AB szakasz felezőmerőlegese által meghatározott, A-t tartalmazó félsíkban (félgömbön) levő pontok közelebb vannak A-hoz, mint B-hez.

2.1.9. *Körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők.*

2.1.10. *Érintőnégyszögekre vonatkozó tétel és megfordítása.* (A megfordítás bizonyítására mindkét módszer — direkt és indirekt — használható.)

2.2. Mint említettem, vannak olyan tételek, amelyek mindhárom geometriában érvényesek, de az iskolában használt bizonyításuk euklideszi. Ilyenek:

2.2.1. *A háromszög súlyvonalai egy ponton mennek át.*

2.2.2. *Körbe írt n-szögek közül a szabályos n-szög kerülete és területe maximális.*

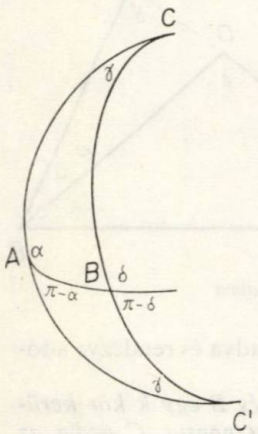
2.2.3. *A kör köré írt n-szögek közül a szabályos n-szög kerülete és területe minimális.*

Ezek tárgyalására egy következő cikkben térünk vissza.

2.3. Az utolsó és a cikk leghosszabb részében olyan tételekkel és feladatokkal foglalkozom, amelyeket át kell fogalmazni ahhoz, hogy mindhárom geometriában igaz tételek legyenek. Az átfogalmazott tétel természetesen az euklideszi geometriában ismert tételt is tartalmazza. Foglalkozom a háromszög szögeire vonatkozó tételekkel, a kerületi szögek tételének megfelelőjével, a húrnégyszögekkel; a háromszög területével egy későbbi cikkemben.

2.3.1. *A háromszög külső szögének és egy nem mellette levő belső szögének összege nagyobb a másik nem mellette levő belső szögnél.*

Első pillanatban meglepő, hogy miért kell ezt így bonyolítani, hiszen euklideszi és hiperbolikus esetben a külső szög nagyobb, mint bármelyik nem mellette fekvő belső szög, ugyanis a szögek összege a háromszögben nem nagyobb 180°-nál. Ez utóbbi tétel a gömbháromszögekre nem igaz. Vegyünk egy ABC és egy ABC' gömbháromszöget, ahol C' a C átellenes pontja! A 2. ábra jelöléseit használva, $\delta > \alpha \Rightarrow \pi - \delta < \pi - \alpha$, vagyis az ABC' gömbháromszög B-nél levő külső szöge kisebb az A-nál levő belső szögnél. Nyilván a **2.3.1.** tételt csak gömbháromszögre kell bebizonyítani. Az ABC' gömbháromszög szögeinek összege nagyobb π-nél, azaz



2. ábra

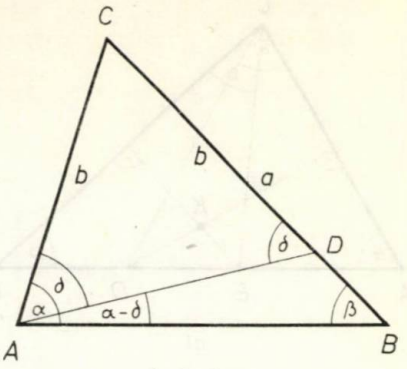
$$\gamma + \delta + \pi - \alpha > \pi.$$

Ebből

$$\delta + \gamma > \alpha,$$

amit bizonyítani akartunk.

Megjegyzés: A **2.3.1.** tétel egyszerű következménye a **2.1.5.** tétel. A 3. ábra jelöléseit használva δ az ABD háromszög külső szöge, ezért



3. ábra

$$\delta + \alpha - \delta > \beta,$$

$$\alpha > \beta.$$

2.3.2. Jelöljük az ABC háromszög megfelelő szögeit α-val, β-val, γ-val! Legyen

$$2\varepsilon_C = \alpha + \beta - \gamma,$$

$$2\varepsilon_B = \alpha + \gamma - \beta, \quad (1)$$

$$2\varepsilon_A = \beta + \gamma - \alpha.$$

Az $\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C$ értékeket rendre az α, β, γ *szöghöz tartozó szögeltérésnek nevezzük.*

Nyilván

$$\gamma \geqq \max(\alpha, \beta) \Leftrightarrow \varepsilon_C \geqq \max(\varepsilon_A, \varepsilon_B),$$

továbbá ha az euklideszi síkon $\varepsilon_C = 0$, akkor a háromszög derékszögű; ha $\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C > 0$, akkor a háromszög hegyesszögű; és ha pl. $\varepsilon_C < 0$, akkor a háromszög tompaszögű.

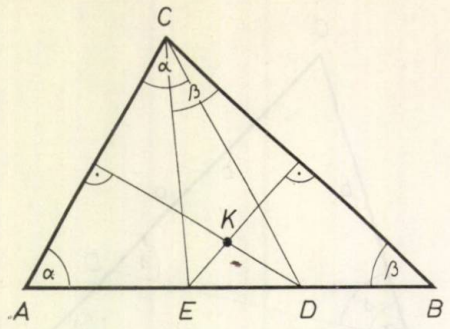
2.3.2.1. *Az ABC háromszögben legyen* $\gamma \geqq \max(\alpha, \beta)$.

Ha $\varepsilon_C > 0$, *akkor az ABC háromszög körülírt körének középpontja belső pont.*

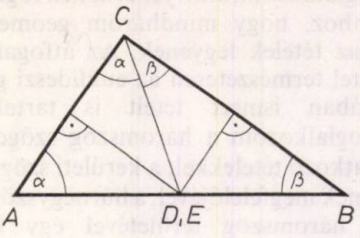
Ha $\varepsilon_C = 0$, *akkor a háromszög köré írt kör középpontja AB felezőpontja.*

Ha $\varepsilon_C < 0$, *akkor amennyiben létezik a háromszögnek körülírt köre, úgy annak a középpontja a háromszög külső pontja.* (A létezés feltétele a hiperbolikus síkon kell.)

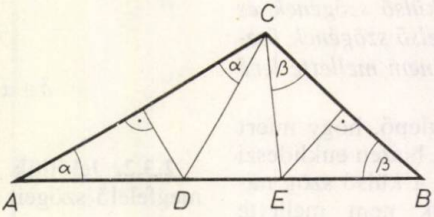
Bizonyítás: Mérjük fel az AC oldal mindkét végpontjába az α-t, BC-ére pedig a β-t (4. *a), b), c)* ábrák)! A szögek egyenlőségéből következik, hogy



a)



b)



c)

4. ábra

$AD=CD$ és $BE=CE$, továbbá AC felezőmerőlegesén rajta van D, BC-én pedig E.

$\alpha+\beta>\gamma$ esetén $AEDB$ elrendezés áll fenn, ezért AC és BC felezőmerőlegese az ABC háromszögben metszi egymást.

$\alpha+\beta=\gamma$ esetén $E\equiv D$, ezért $AE=BE=CE$.

$\alpha+\beta<\gamma$ esetén $ADEB$ elrendezés áll fenn, ha tehát AC és BC felezőmerőlegese metszi egymást, akkor a metszéspont külső pont.

2.3.2.2. *Tekintsük az ABC és ABD háromszögeket! Szögeik legyenek* α, β, γ, illetve $\alpha_1, \beta_1, \delta$, *továbbá D az ABC háromszögnek nem külső pontja!*

Állítás:

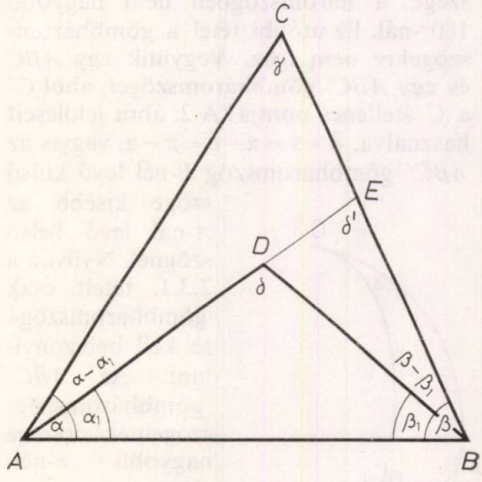
(2) $2\varepsilon_C = \alpha+\beta-\gamma > \alpha_1+\beta_1-\delta = 2\varepsilon_D.$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $D \notin AC$. Az AD egyenes és BC metszéspontja E (5. ábra). Az ACE háromszögnek δ' külső szöge, ezért a **2.3.1.** tétel alapján:

(3) $$\delta'+\alpha-\alpha_1 > \gamma.$$

BDE háromszögnek δ külső szöge, így **2.3.1.** alapján:

(4) $$\delta+\beta-\beta_1 > \delta'.$$



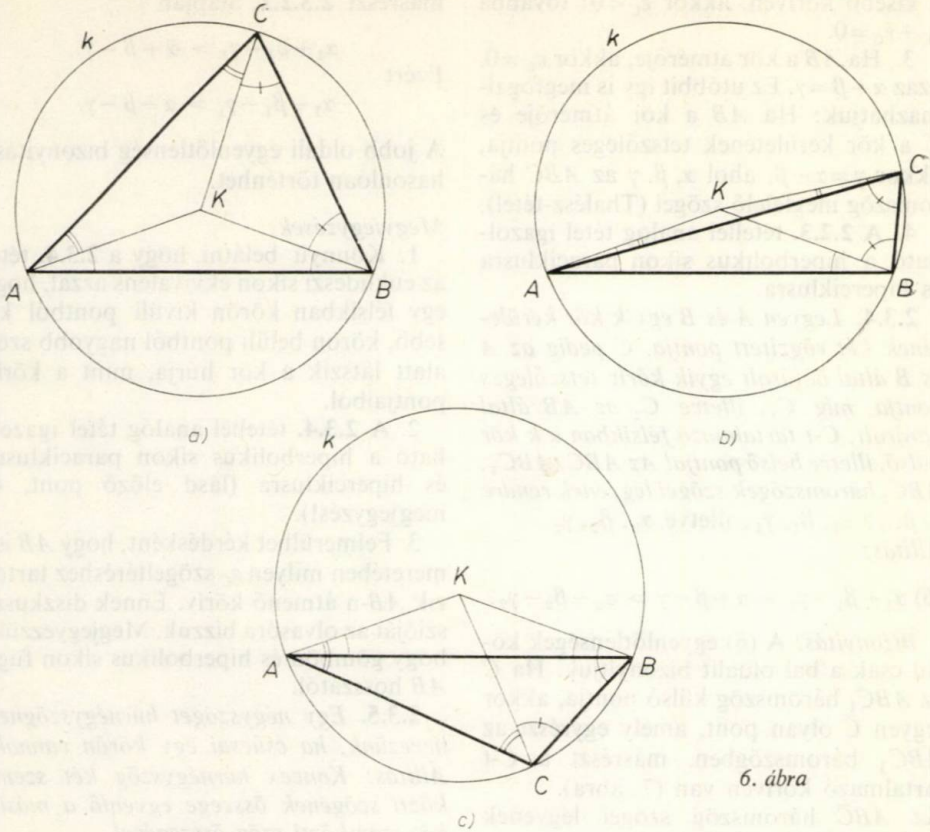
5. ábra

(3)-at és (4)-et összeadva és rendezve adódik (2).

2.3.3. *Legyen A és B egy k kör kerületének két rögzített pontja, C pedig az A és B által határolt egyik körív tetszőleges pontja* (6. ábra)!

Állítás: az ABC háromszögben γ *szögeltérése, azaz*

(5) $$2\varepsilon_C = \alpha+\beta-\gamma$$



6. ábra

független C-től, ahol α, β, γ *az ABC háromszög megfelelő szögei.*

Bizonyítás: Legyen K a k kör középpontja! Kössük össze K-t A-val, B-vel és C-vel! Nyilván az ABK, az ACK, a BCK háromszögek egyenlő szárúak, ezért a 6. *a), b), c)* ábrákon ugyanazzal az ívvel jelölt szögek egyenlők.

a) Ha C az A és B pontok által határolt nem kisebb íven van, és K az ABC háromszögnek nem külső pontja, akkor a 6. *a)* ábra jelöléseit használva

$$2\varepsilon_C = \alpha + \beta - \gamma = \sphericalangle + \sphericalangle + \sphericalangle + \sphericalangle - (\sphericalangle + \sphericalangle) = 2\sphericalangle = \text{állandó}.$$

b) Ha C az A és B pontok által határolt nem kisebb íven van, és K az ABC háromszög külső pontja, akkor a 6. *b)* ábra jelöléseit használva

$$2\varepsilon_C = \alpha + \beta - \gamma = \sphericalangle - \sphericalangle + \sphericalangle + \sphericalangle - (\sphericalangle - \sphericalangle) = 2\sphericalangle = \text{állandó}.$$

c) Ha C az A és B pontok által határolt kisebb íven van, akkor a 6. *c)* ábra jelöléseit használva

$$2\varepsilon_C = \alpha + \beta - \gamma = \sphericalangle - \sphericalangle + \sphericalangle - \sphericalangle - (\sphericalangle + \sphericalangle) = -2\sphericalangle = \text{állandó}.$$

Ezzel igazoltuk az állítást.

Megjegyzések:

1. Ha az euklideszi síkon vagyunk, akkor

$$2\varepsilon_C = \pi - 2\gamma,$$

azaz ε_C állandóságából következik γ állandósága és fordítva. (Kerületi szögek tétele.)

2. A bizonyításból adódik, hogy ha C a nagyobb köríven van, akkor $\varepsilon_C > 0$; ha

a kisebb köríven, akkor $\bar{\varepsilon}_C < 0$; továbbá $\varepsilon_C + \bar{\varepsilon}_C = 0$.

3. Ha AB a kör átmérője, akkor $\varepsilon_C = 0$, azaz $\alpha + \beta = \gamma$. Ez utóbbit így is megfogalmazhatjuk: Ha AB a kör átmérője és C a kör kerületének tetszőleges pontja, akkor $\gamma = \alpha + \beta$, ahol α, β, γ az ABC háromszög megfelelő szögei (Thalész-tétel).

4. A **2.2.3.** tétellel analóg tétel igazolható a hiperbolikus síkon paraciklusra és hiperciklusra.

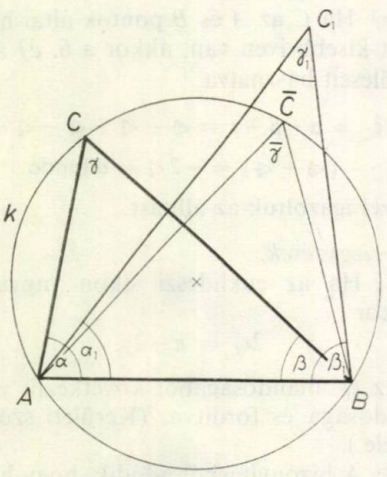
2.3.4. *Legyen A és B egy k kör kerületének két rögzített pontja, C pedig az A és B által határolt egyik körív tetszőleges pontja, míg C_1, illetve C_2 az AB által határolt, C-t tartalmazó félsíkban a k kör külső, illetve belső pontja! Az ABC, ABC_1, ABC_2 háromszögek szögei legyenek rendre α, β, γ; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, illetve $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$. Állítás:*

$$(6)\quad \alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1 > \alpha + \beta - \gamma > \alpha_2 + \beta_2 - \gamma_2.$$

Bizonyítás: A (6) egyenlőtlenségek közül csak a bal oldalit bizonyítjuk. Ha C az ABC_1 háromszög külső pontja, akkor legyen $\bar{C}$ olyan pont, amely egyrészt az ABC_1 háromszögben, másrészt a C-t tartalmazó köríven van (7. ábra).

Az $AB\bar{C}$ háromszög szögei legyenek $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$. A **2.3.3.** tétel alapján

$$\alpha + \beta - \gamma = \bar{\alpha} + \bar{\beta} - \bar{\gamma},$$



7. ábra

másrészt **2.3.2.2.** alapján

$$\alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1 > \bar{\alpha} + \bar{\beta} - \bar{\gamma}.$$

Ezért

$$\alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1 > \alpha + \beta - \gamma.$$

A jobb oldali egyenlőtlenség bizonyítása hasonlóan történhet.

Megyjegyzések:

1. Könnyű belátni, hogy a **2.3.4.** tétel az euklideszi síkon ekvivalens azzal, hogy egy félsíkban körön kívüli pontból kisebb, körön belüli pontból nagyobb szög alatt látszik a kör húrja, mint a körív pontjaiból.

2. A **2.3.4.** tétellel analóg tétel igazolható a hiperbolikus síkon paraciklusra és hiperciklusra (lásd előző pont, 4. megjegyzés!).

3. Felmerülhet kérdésként, hogy AB ismeretében milyen ε_C szögeltéréshez tartozik AB-n átmenő körív. Ennek diszkusszióját az olvasóra bízzuk. Megjegyezzük, hogy gömbön és hiperbolikus síkon függ AB hosszától.

2.3.5. *Egy négyszöget húrnégyszögnek nevezünk, ha csúcsai egy körön vannak. Állítás: Konvex húrnégyszög két szemközti szögének összege egyenlő a másik két szemközti szög összegével.*

Bizonyítás: Legyen a kör középpontja K. ABK, BCK, CDK, DAK háromszögek egyenlő szárúak, ezért a 8. *a)*, *b)* ábrákon azonos ívvel jelölt szögek egyenlők.

Ha K az $ABCD$ négyszögnek nem külső pontja (8. *a)* ábra), akkor

$$\alpha + \gamma = \sphericalangle + \sphericalangle + \sphericalangle + \sphericalangle = \beta + \delta.$$

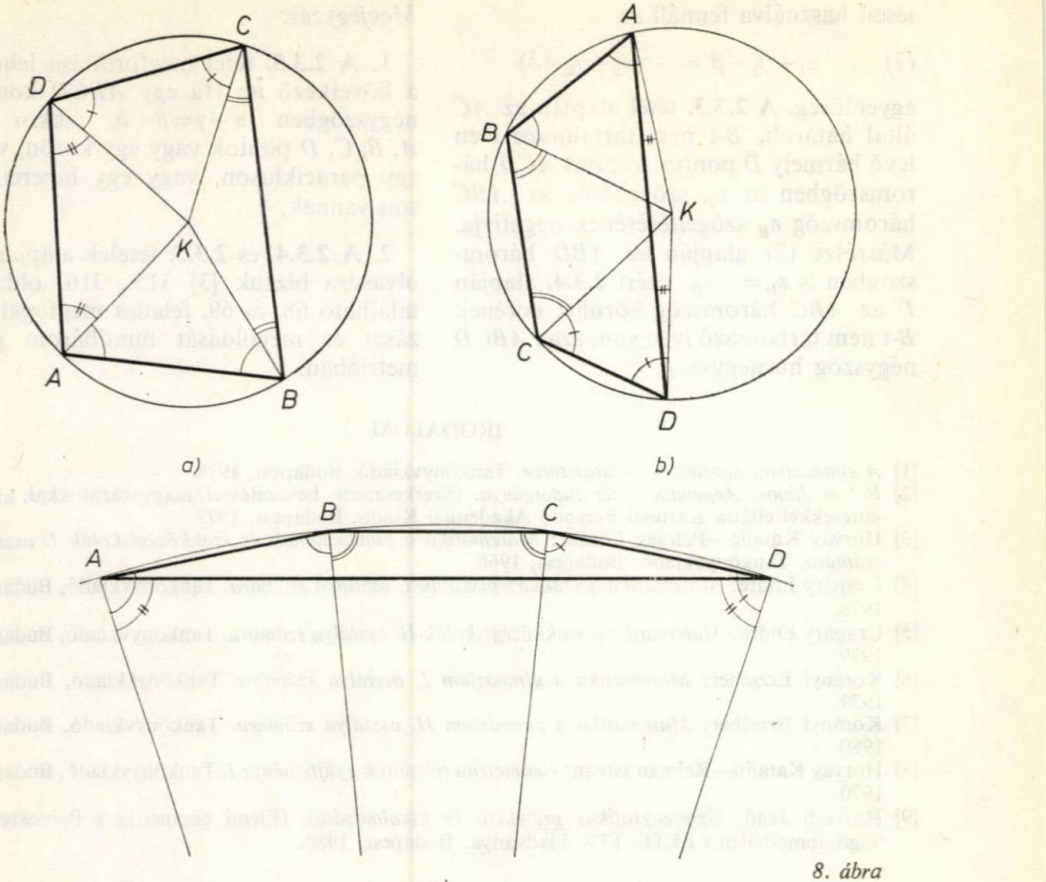
Ha K az $ABCD$ négyszögnek külső pontja (8. *b)* ábra), akkor

$$\alpha + \gamma = \sphericalangle - \sphericalangle + \sphericalangle + \sphericalangle = \beta + \delta.$$

Megjegyzések:

1. Euklideszi síkon — mivel a négyszög szögeinek összege 360° — a két szemközti szög összege 180°.

2. A **2.3.5.** tétel bizonyítható akkor is, ha a négyszög csúcsai a hiperbolikus síkon egy paracikluson vagy hipercikluson vannak. Ugyanis tekintsük az $ABCD$



8. ábra

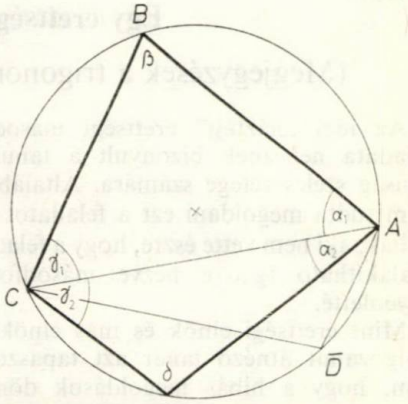
pontokon átmenő tengelyeket (8. *c)* ábra). Ismert [2], hogy az ábrán azonos ívvel jelölt szögek egyenlők, ezért

$$\alpha+\gamma = \sphericalangle - \sphericalangle + \sphericalangle + \sphericalangle = \beta+\delta.$$

2.3.6. Az előző pont 2. megjegyzése miatt a húrnégyszögek tétele nyilván nem fordítható meg. Itt egy, a középiskolában is használható megfordítást adunk.

Ha egy ABCD konvex négyszögben két szemközti szög összege egyenlő a másik két szemközti szög összegével, és az A, B, C pontok egy körön vannak, akkor az ABCD négyszög húrnégyszög.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy $\alpha+\gamma=\beta+\delta$, és az *A*, *B*, *C* pontok egy körön vannak. Kössük össze *A*-t *C*-vel! A 9. ábra jelö-



9. ábra

léseit használva fennáll az

(7) $\alpha_1+\gamma_1-\beta = -(\alpha_2+\gamma_2-\delta)$

egyenlőség. A **2.3.3.** tétel alapján az AC által határolt, B-t nem tartalmazó íven levő bármely $\bar{D}$ ponttal képzett $AC\bar{D}$ háromszögben az $\varepsilon_{\bar{D}}$ szögeltérés az ABC háromszög ε_B szögeltérésének negatívja. Másrészt (7) alapján az ABD háromszögben is $\varepsilon_D = -\varepsilon_B$, ezért **2.3.4.** alapján D az ABC háromszög körülírt körének B-t nem tartalmazó ívén van, azaz $ABCD$ négyszög húrnégyszög.

Megjegyzés:

1. A **2.3.5.** tétel megfordítása lehetne a következő is: Ha egy $ABCD$ konvex négyszögben $\alpha+\gamma=\beta+\delta$, akkor az A, B, C, D pontok vagy egy körön, vagy egy paracikluson, vagy egy hipercikluson vannak.

2. A **2.3.4.** és **2.3.5.** tételek alapján az olvasóra bízzuk [3] 315., 316. oldalán található 68. és 69. feladat megfogalmazását és megoldását mindhárom geometriában.

IRODALOM

[1] *A gimnáziumi nevelés és oktatás terve.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
[2] *Bolyai János, Appendix a tér tudománya.* (Szerkesztette, bevezetéssel, magyarázatokkal, kiegészítésekkel ellátta Kárteszi Ferenc.) Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973.
[3] Horvay Katalin—Pálmay Lóránt: *Matematika a gimnáziumok és szakközépiskolák I. osztálya számára.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.
[4] Czapáry Endre: *Matematika a szakközépiskolák I. osztálya számára.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
[5] Czapáry Endre: *Matematika a szakközépiskolák II. osztálya számára.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.
[6] Korányi Erzsébet: *Matematika a gimnázium I. osztálya számára.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.
[7] Korányi Erzsébet: *Matematika a gimnázium II. osztálya számára.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.
[8] Horvay Katalin—Reiman István: *Geometriai feladatok gyűjteménye I.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.
[9] Horváth Jenő: *Sztereografikus projekció és alkalmazásai.* (Elemi geometria a Poincare-féle félgömbmodellen.) ELTE TTK kiadványa, Budapest, 1980.

RÁCZ JÁNOS
vezetőtanár
Budapest

Egy érettségi feladat ürügyén

(Megjegyzések a trigonometrikus egyenletek tanításáról)

Az idei „háztáji" érettségi második feladata nehéznek bizonyult a tanulóifjúság széles rétege számára. Általában nem tudta megoldani ezt a feladatot az a diák, aki nem vette észre, hogy a feladat átalakítható $\operatorname{tg} x$-re nézve másodfokú egyenletté.

Mint érettségi elnök és más elnökök dolgozatait átnéző tanár azt tapasztaltam, hogy a hibás megoldások döntő többsége a $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ hibás azonosságot használta fel és ezért nem jutott eredményre.

Ez a hibás azonosság rendkívül elterjedt a tanítási gyakorlatban. A Geometriai feladatgyűjtemény II. kötete is, a Pálfai Pál szerkesztésében megjelent Felvételi feladatok is használja e hibás azonosságot.

Ezért tisztázni kell, hogy miért nevezem hibásnak e közkézen forgó két azonosságot: azért, mert az idézett formában az értelmezési tartományt a „felső" félkörre, a másik változatban pedig a „jobb oldali" félkörre szűkíti le a teljes kör helyett.

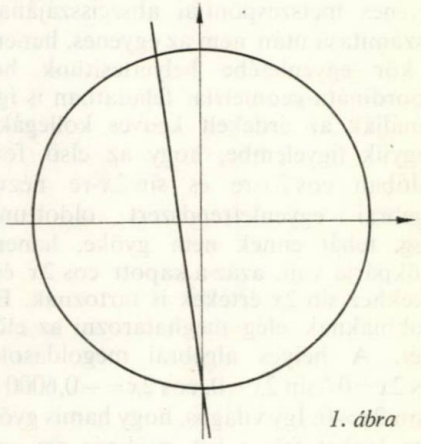
Vegyük észre ugyanis, hogy minden olyan trigonometrikus egyenlet, amelyik $f(\cos x; \sin x)=0$ alakú, geometriai tartalmát tekintve az $f(x; y)=0$ egyenletű görbe és az egységkör metszéspontjainak meghatározását jelenti úgy, hogy a metszéspontokba mutató egységvektoroknak a pozitív x tengellyel bezárt összes szögét keressük!

Érettségi feladatunk az $y^2-xy-2x^2=0$ egyenletű „görbe" és az egységkör metszéspontjait keresi. „Görbénk" egy origón átmenő egyenespár, ezért a trigonometrikus egyenletnek két 180°-os periódusú gyöke van. Egyenletünk valóban szorzattá alakítható:

$$(y+x)(y-2x)=0.$$

A látott hibás megoldások sémája a következő volt: A hibás azonosság felhasználásával az $1-\cos^2 x-\cos x \cdot \sqrt{1-\cos^2 x}-2\cdot\cos^2 x=0$ gyökös egyenletet oldják meg, természetesen négyzetre emeléssel. Először is vegyük észre, hogy a gyökös egyenlet nem ekvivalens az eredetivel, mert a gyökös egyenlet az eredeti egyenespár és a „felső" félkör metszéspontjaira kíváncsi, tehát két 360°-os periódusú gyök elégíti ki! Másodszor a négyzetre emelés következtében az új egyenlet négyzete a $3\cdot\cos^2 x-1=\cos x\cdot\sqrt{1-\cos^2 x}$ egyenletnek is, tehát az eredeti egyenespáron kívül az $y^2+xy-2x^2=(y-x)(y+2x)=0$ egyenletű egyenespárnak is adja a metszéspontjait az egységkörrel. Így a négyzetre emelt egyenlet nem két, hanem négy, origón átmenő egyenes és az egységkör metszéspontjait adja, tehát négy darab 180°-os periódusú gyököt szolgáltat. Itt most kétségtelenül a négyzetre emelés a hamis gyökök fellépésének oka. A négyzetre emelés azonban kikerülhető nemcsak a mutatott szorzattá alakítással, hanem például úgy is, hogy az egyenletet szorozzuk 2-vel, és felhasználjuk a következő két azonosságot: $2\cdot\sin^2 A=1-\cos 2A$; $2\cdot\cos^2 A=1+\cos 2A$. Akkor egyenletünk így alakul: $3\cdot\cos 2x+\sin 2x=-1$. Ennek az egyenlettípusnak a tanítása okozza véleményem szerint a legtöbb problémát. Ismeretes, hogy ez a típus 3 különböző módszerrel is megoldható. E három módszer közül itt most részletesen az elsőt tárgyalom, amelyet mindenki minden osztályban tanít, és amelynek keretében olyan gátlástalanul bukkan fel az előbb már kárhoztatott hibás, gyökös azonosság.

Nézzük először a geometriai tartalmat! $X=\cos 2x$; $Y=\sin 2x$ helyettesítések figyelembevételével megint egy egyenes és az egységkör metszéspontjait keressük. Az 1. ábra mutatja, hogy az egyik metszéspont a negatív y tengely és a kör metszéspontja, a második metszéspont a második negyedre esik. Ezért $2x$ szempontjából két, egyenként 360°-os periódusú gyök lesz, így x szempontjából két, egyenként 180°-os periódusú gyök.



1. ábra

Egyszer és mindenkorra szögezzük le, hogy az $A\cdot\cos x+B\cdot\sin x=C$ egyenletnek legfeljebb két, egyenként 360°-os periódusú gyöke lehet, mert egyenesnek és körnek legfeljebb két metszéspontja van!

Algebrai szempontból tekintsük egyenletünket $\cos 2x$-re és $\sin 2x$-re nézve kétismeretlenesnek! A két ismeretlenhez még egy második egyenlet is van: $\cos^2 2x+\sin^2 2x=1$. Így egyenletünk $\cos 2x$-re és $\sin 2x$-re nézve másodfokú

kétismeretlenes egyenletrendszer, amelyiknek egyik egyenlete elsőfokú. Ilyen esetben az *elsőfokú* egyenletből fejezzük ki az egyik ismeretlent és ezt helyettesítjük a második egyenletbe: tehát pl. $\sin 2x = -(1+3\cdot\cos 2x)$. Helyettesítve és rendezve: $10\cdot\cos^2 2x+6\cdot\cos 2x = 2\cdot\cos 2x(5\cdot\cos 2x+3)=0$. Ebből $\cos 2x=0$ vagy $\cos 2x=-0{,}6000$ adódik.

Ha most feladatunkat trigonometrikus egyenletként folytatjuk $2x$-re nézve, akkor két egységvektort kapunk egyenletenként, holott előre tisztáztuk, hogy egy-egy egységvektort kell kapnunk. Ilyenkor szerepel a megoldásban — például az idézett könyvekben is, — hogy ellenőrzéssel szűrjük ki a hamis gyököket. Ez ismét lehet tévedés forrása! Ha egyenletünket trigonometrikus egyenletként folytatjuk minden további nélkül, akkor ez geometriailag azt jelenti, hogy a kör és egyenes metszéspontjai abszcisszájának kiszámítása után nem az egyenes, hanem a kör egyenletébe helyettesítünk be! Koordináta-geometriai feladatban is így csinálják az érdekelt kedves kollégák? Vegyük figyelembe, hogy az első fordulóban $\cos 2x$-re és $\sin 2x$-re nézve algebrai egyenletrendszert oldottunk meg, tehát ennek nem gyöke, hanem gyökpárja van, azaz a kapott $\cos 2x$ értékekhez $\sin 2x$ értékek is tartoznak. Ez utóbbiaknak elég meghatározni az előjelét. A helyes algebrai megoldások: $\cos 2x=0 \wedge \sin 2x<0$, $\cos 2x=-0{,}6000 \wedge \wedge \sin 2x>0$. Így világos, hogy hamis gyök nem léphet fel; e két gyökpár egy-egy egységvektort jelent a hozzá tartozó egy-egy szöggel, amelyek csak 360° egész számú többszöröseinek hozzáadásától eltekintve meghatározottak egyértelműleg.

Ideiktatom a Felvételi feladatok **529.** feladatának megoldását: „Az addíciós tételeket felhasználva és az ismert szögfüggvényértékeket beírva, rendezés után a $\sqrt{3}\cdot\sin x+\cos x=\sqrt{2}$ egyenletet nyerjük. $\sqrt{3}\cdot\sin x-\sqrt{2}=-\sqrt{1-\sin^2 x}$ egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük. $4\cdot\sin^2 x-2\sqrt{6}\cdot\sin x+1=0$. Ebből

$$\sin x_1=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};\quad \sin x_2=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

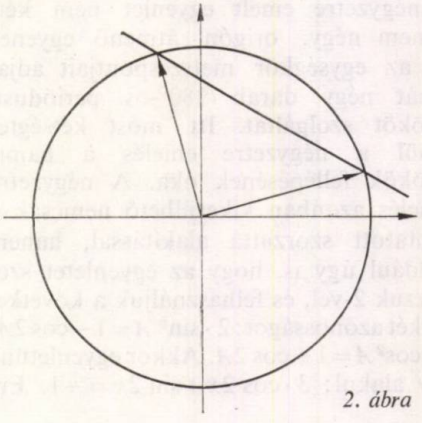
Ellenőrzés után a megoldás:

$$x_1=74^\circ 56'+k\cdot 360^\circ;\quad x_2=105^\circ 04'+k\cdot 360^\circ;\quad x_3=15^\circ+k\cdot 360^\circ.$$

Mint látjuk, a geometriai tartalom figyelmen kívül hagyása azt eredményezi, hogy *ellenőrzés után is* három metszéspontja van egyenesnek és körnek!

Az itt közölt megoldás tipikus, sajnos tipikusan rossz, ezért érdemes elemezni. A $\sqrt{3}\cdot\sin x-\sqrt{2}=-\sqrt{1-\sin^2 x}$ egyenlet először is nem ekvivalens az eredetivel, mert ennek az egyenletnek csak a „jobb oldali" félkörön lehetnek gyökei, így kiesik a második negyedbeli gyök. A négyzetre emelt egyenlet viszont megint két egyenesnek, mégpedig az eredeti egyenesnek és ez egyenes y tengelyre vonatkozó tükörképének, valamint az egységkörnek a metszéspontjait adja meg azok koordinátáival. Így négy metszéspontot kapott a megoldó és nyilván elnézésből fakadóan hármat jónak látott. (Ilyen elnézés 74° 56′ is a helyes 75° helyett.) Az elnézés forrása azonban az egyenlet hibás koncepciójú megoldása.

Nézzük most a helyes megoldást! A 2. ábra mutatja, hogy egyenesünk az első és második negyedben metszi az egységkört. Algebrailag: $\cos x=-\sqrt{3}\cdot\sin x+\sqrt{2}$; ezt behelyettesítve a $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ egyenletbe, rendezés után ugyanazt a másod-



2. ábra

fokú egyenletet és ezért ugyanazt a két $\sin x$ értéket kapjuk, mint előbb. De mivel egyenletrendszerünknek nem gyöke, hanem gyökpárja van: $\sin x_1 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \wedge \cos x_1 < 0$; $\sin x_2 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \wedge \cos x_2 > 0$ a két gyökpár, tehát

$$x_1 = 105° + k_1 \cdot 360°; \quad x_2 = 15° + k_2 \cdot 360°.$$

Az együtthatók itt nagyon motiválják, hogy az egyenletet „fáziseltolással" oldjuk meg: ha 2-vel osztjuk az egyenletet, akkor

$$\sin x \cdot \cos 30° + \cos x \cdot \sin 30° = \sin 45°,$$

tehát

$$\sin (x + 30°) = \sin 45°.$$

Vegyük figyelembe, hogy ha $\sin A = \sin B$, akkor $A - B = k \cdot 360°$ vagy $A + B = 180° + n \cdot 360°$, ahol $k \in Z \wedge n \in Z$. Tehát $x - 15° = k \cdot 360°$ vagy $x + 75° = 180° + n \cdot 360°$, és innen adódik a már közölt két gyök.

Ugyanitt az **502.** feladat: „Oldjuk meg a $\sin 2x + \cos 2x = 2 \cdot \cos x - 1$ egyenletet!"

Itt mindjárt a mintamegoldás következik. Helyes átalakítás után a következő egyenlet adódik:

$$\cos x (\sin x + \cos x - 1) = 0.$$

Az átalakítások idáig helyes, tehát minden x-re érvényes azonosságok felhasználásával történtek, azért ez az egyenlet biztosan ekvivalens az eredetivel.

Innen idézem a megoldást: „A fenti egyenletből

a) $\cos x = 0$, azaz $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ (ahol k egész szám). Ellenőrzéssel meggyőződhetünk, hogy ezek az eredeti egyenletnek is gyökei.

b) $\sin x + \cos x - 1 = 0$;
$\sin x + \cos x = 1$.

Négyzetre emelés után

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 1.$$

Felhasználjuk a

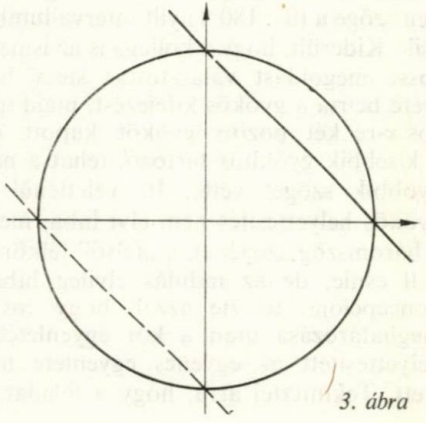
$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

és a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot, így $1 + \sin 2x = 1$; $\sin 2x = 0$; amelyből $2x = \pi l$, azaz $x_2 = \frac{\pi}{2} \cdot l$ (ahol l egész). Ellenőrzés után kiderül, hogy l csak páratlan szám lehet. Tehát $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, ahol n egész szám."

Az *a)* részben nem ellenőrzés dönt a gyök helyességéről, mert ekvivalens egyenletről van szó, tehát az új egyenlet minden gyöke gyöke a réginek is.

A *b)* részben ismét a hibás koncepció. Miért kell négyzetre emelni, miért kell egyáltalában számolni? A 3. ábra mutatja, hogy melyik egyenesnek a metszéspontjait keressük az egységkörrel. Itt a rajz szerint világos, hogy a két metszéspont: $(1; 0)$ és $(0; 1)$. Tehát $x_2 = 2\pi l$; $x_3 = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, ahol $l \in Z \wedge m \in Z$; x_3 azonban benne van x_1-ben, tehát a gyökök: $x_1 = \frac{\pi}{2}(2n+1)$; $x_2 = 2\pi l$, ahol $n \in Z \wedge l \in Z$.

A *b)* részben a hibás koncepció következtében nemcsak egyenesünknek, hanem a $(-1; 0)$ és $(0; -1)$ pontokon átmenő, vele párhuzamos egyenesnek is keressük a metszéspontjait. A négy metszéspont közül az utolsó azért marad bent, mert benne volt x_1-ben; a harmadik pl. $l = 2$-re esik ki, innen a hibás



3. ábra

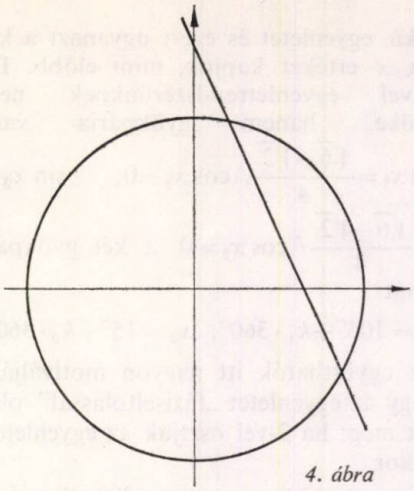
következtetés, hogy l csak páratlan lehet. (Helyes az lett volna, hogy l vagy páratlan, vagy néggyel osztható páros!)

A *b)* részhez a rajzon kívül is vegyük észre, hogy bármely szög — amelyhez tartozó egységvektor nem esik valamelyik tengelyre — cosinusa, sinusa és a szöghöz tartozó egységvektor szakasza derékszögű háromszöget határoz meg, ezért a háromszög-egyenlőtlenség következtében: az első negyedben $\sin x + \cos x > 1$; a többi negyedben $\sin x + \cos x < 1$; így egyenlőség csak akkor lehet, ha az x-hez tartozó egységvektor az első negyedet a másodiktól, illetve a negyediktől elválasztó egységvektor.

Szeretném aláhúzni, hogy a koncepció akkor is hibás, ha utána kiszűrjük a hamis gyököket. (Aligha fogadnánk el követendőnek pl. ezt a megoldást: $2x-5=7-x$; emeljünk négyzetre: $4x^2-20x+25=49-14x+x^2$; rendezve és egyszerűsítve: $x^2-2x-8=0$; ebből $x_1=4$; $x_2=-2$; ellenőrzéssel meggyőződhetünk róla, hogy x_1 jó gyök, x_2 pedig hamis!)

Érettségi szóbelin elnökként találkoztam a következő feladattal: Határozza meg annak a háromszögnek a területét, amelynek két oldala 8 cm és 5 cm, a közbezárt szög pedig a $\sin x + 2 \cdot \cos x = 1{,}6$ egyenletet kielégítő *nagyobbik* szög!

A feladatot kitűző kolléga nyilván nem figyelt a geometriai tartalomra, hiszen a 4. ábra szerint egyetlen szög jön szóba, tekintve hogy a háromszög minden szöge a $(0°; 180°)$ nyílt intervallumba esik. Kiderült, hogy a kolléga is az ismert rossz megoldást választotta: $\sin x$ helyére beírta a gyökös kifejezést, majd így $\cos x$-re két pozitív gyököt kapott, és a kisebbik gyökhöz tartozó, tehát a nagyobbik szöget vette. Itt véletlenül a gyökös helyettesítés nem elvi hiba, mert a háromszög szögének a „felső" félkörre kell esnie, de az indulás elvileg hibás koncepcióját tetézte azzal, hogy $\cos x$ meghatározása után a kör egyenletébe helyettesített az egyenes egyenlete helyett. Tekintettel arra, hogy a feladat a



4. ábra

háromszög területére volt kíváncsi, nem a szögre, hanem a szög sinusára volt szükség, és így az lett volna helyes, hogy $\cos x$-et fejezi ki az elsőfokú egyenletből és azt helyettesíti be a négyzetes összefüggésbe. Ekkor $\sin x$-re kapott volna másodfokú egyenletet, a rajz tanúsága szerint egy pozitív és egy negatív gyökkel. Egy háromszögbeli szög sinusa azonban biztosan pozitív, ezért a pozitív $\sin x$ az egyetlen szóba jöhető érték.

A Geometriai feladatgyűjtemény II. kötetében az **508.** *p)* feladat: $\sin 4x + \sqrt{3} \cdot \cos 4x = \sqrt{2}$. A megoldásban nagyon helyesen lényegében a „fáziseltolást" alkalmazza a szerző, így a $\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$ egyenletre jut. Ebből azonban csak egy gyöksorozatot állít elő.

Ez a tény rávilágít arra a tapasztalatomra, hogy tanításunk folyamán nem kap elég hangsúlyt a trigonometriával fellépő új mozzanat: a megfordítás nem egyértelmű, és nem is tehető egyértelművé. A négyzetre emelés megfordításakor már felvetődött a probléma, hiszen két olyan szám van, amelynek ugyanaz a négyzete. Itt olyan megállapodás született, hogy a nemnegatív valós számok halmazában $\sqrt{a}$ az a nemnegatív szám, amelynek négyzete a. Igen nehéz problémát jelent diákjainknak, hogy a négy-

zetgyökkel kapcsolatban két kikötés van: a gyök alatti kifejezés nem lehet negatív, maga a gyökös kifejezés sem lehet negatív. Ezt a tényt feladatokon keresztül kell gyakorolni, mert csak az a tudás él diákjainkban, amit feladatokban láttak. Oldjuk meg órán például a következő típusú egyenletet:

$$x-8+28\sqrt{\frac{x-8}{x+22}}-\frac{288}{x+22}=0.$$

A kikötés kézenfekvő: a gyök alatti kifejezés nem lehet negatív, a tört nevezője nem lehet 0, tehát $x\geqq 8 \vee x<-22$. Távolítsuk el a törtet: $(x-8)(x+22)+28(x+22)\sqrt{\frac{x-8}{x+22}}-288=0$. Várható, hogy most több diákunk javasolja: vigyük be a gyök alá $(x+22)$-t, így lesz:

$$(x-8)(x+22)+$$
$$+28\sqrt{(x-8)(x+22)}-288=0.$$

Ez másodfokú egyenlet

$\sqrt{(x-8)(x+22)}$-re nézve,

tehát $\sqrt{(x-8)(x+22)}=8$

vagy $\sqrt{(x-8)(x+22)}=-36$

gyökös egyenletekre jutunk. A második gyökös egyenletnek nem lehet gyöke, mert a négyzetgyökös kifejezés nem lehet negatív. Az első egyenletet megoldjuk: $x_1=10$; $x_2=-24$. Mindkettő benne van az értelmezési tartományban. A helyettesítés meggyőz bennünket arról, hogy x_1 valóban gyök, míg x_2 nem. Miért?

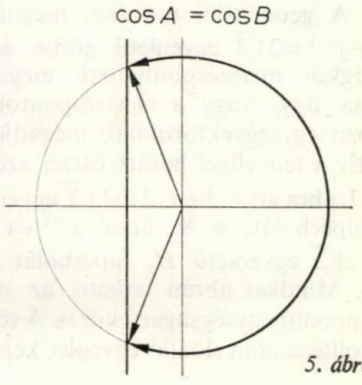
$x+22$ gyök alá vitelekor nem jártunk el kellő körültekintéssel: ugyanis $x+22=\sqrt{(x+22)^2}$ csak akkor igaz, ha $x\geqq -22$, tehát feladatunkban ezzel leszűkítettük az értelmezési tartományt az $x\geqq 8$ intervallumra. Ebbe x_2 nem esik bele, ezért hamis x_2.

Ha $x<-22$, akkor $x+22=-\sqrt{(x+22)^2}$. Ezt figyelembe véve egyenletünk így alakul: $(x-8)(x+22)-28\sqrt{(x-8)(x+22)}-288=0$. Ez is másodfokú egyenlet a gyökös kifejezésre nézve; a gyökök most -8, illetve 36. A négyzetgyökös kifejezés nem lehet -8, tehát $\sqrt{(x-8)(x+22)}=36$. Ez utóbbi egyenletet oldjuk meg: $x_3=32$; $x_4=-46$. Mivel egyenletünk értelmezési tartománya $x<-22$, ezért x_3 hamis, x_4 pedig jó gyök. Érdemes behelyettesíteni is!

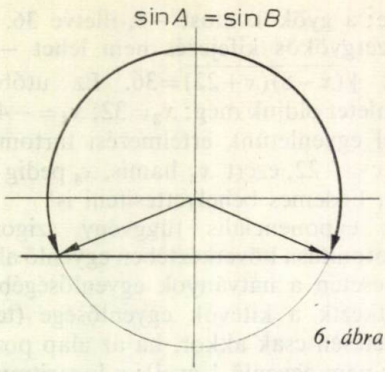
Az exponenciális függvény szigorú monotonitása következtében egyenlő alapok esetén a hatványok egyenlőségéből következik a kitevők egyenlősége (természetesen csak akkor, ha az alap pozitív és nem egyenlő 1-gyel); a logaritmusfüggvény szigorú monotonitása következtében, ha $\log a$ és $\log b$ létezik, és $\log a=\log b$, akkor $a=b$. A trigonometriában azonban új probléma elé kerülünk. A szöghöz egyértelműen rendeljük hozzá az egységvektort, de adott egységvektorhoz végtelen sok szög tartozik.

Ha tehát A és B ugyanahhoz az egységvektorhoz tartozó szöget jelent, akkor $A-B=k\cdot 2\pi$ vagy fokokban $A^\circ-B^\circ=k\cdot 360^\circ$, ahol $k\in Z$. Az egységvektorhoz egyértelműen tartozik a szög cosinusa, illetve sinusa, megfordítva azonban nem. Tehát $\cos A=\cos B$-ből vagy $\sin A=\sin B$-ből nem feltétlenül következik $A=B$. Ha nem következik, akkor lényeges kérdés, hogy mi következik?

Nyilván két esetet kell megkülönböztetnünk: a két szög vagy ugyanahhoz az egységvektorhoz tartozik — ezt előbb már tárgyaltuk —, vagy az egyik szög az egyik, a másik szög a másik egységvek-



5. ábra



6. ábra

torhoz: ez esetben $(A+B)$-t ismerjük (az 5. ábrán, illetve a 6. ábrán láthatók alapján).

Tehát ha $\cos A = \cos B$, akkor $A-B=k\cdot 2\pi \vee A+B=n\cdot 2\pi$, ahol $k\in Z \wedge n\in Z$; ha $\sin A=\sin B$, akkor $A-B=k\cdot 2\pi \vee A+B=\pi+n\cdot 2\pi$; n, k, mint előbb. Az **508.** *p)* feladatban a megoldó megfeledkezett a második esetről.

Érdekesebb az **508.** *r)* feladat:

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=2\sqrt{2}.$$

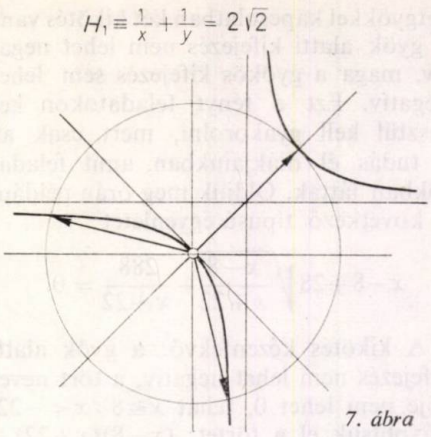
A megoldásban a könyv a törtek eltávolítását, majd négyzetre emelést javasol, így $\sin 2x$-re másodfokú egyenlethez jut. A közölt gyökök:

$$x_1=\frac{\pi}{4}+k\pi;\quad x_2=\frac{7\pi}{12}+k\pi;$$

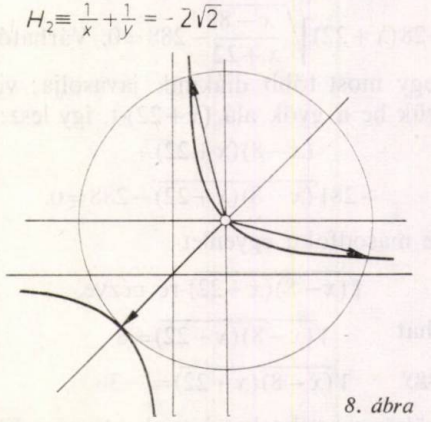
$$x_3=\frac{11\pi}{12}+k\pi.$$

A megoldás megér egy részletes elemzést. A geometriai tartalom megint az $x^{-1}+y^{-1}=2\sqrt{2}$ egyenletű görbe és az egységkör metszéspontjainak meghatározása úgy, hogy a metszéspontokhoz tartozó egységvektoroknak megadjuk a pozitív x tengellyel bezárt összes szögét.

A 7. ábra az $x^{-1}+y^{-1}=2\sqrt{2}$ egyenletű H_1 hiperbolát, a 8. ábra $x^{-1}+y^{-1}=-2\sqrt{2}$ egyenletű H_2 hiperbolát mutatja. Mindkét ábrán látható az origó középpontú egységsugarú kör is. A törtek eltávolítása után előálló egyenlet képe H_1



7. ábra



8. ábra

hiperbola úgy, hogy most az origó is hozzátartozik a görbéhez. Tekintve, hogy az origó nem lehet pontja az egységsugarú körnek, a törtek eltávolítása után előálló egyenlet ekvivalens az eredetivel.

A négyzetre emelt egyenlet azonban már nemcsak H_1 és az egységkör, hanem a 8. ábrán látható H_2 és az egységkör metszéspontjait is tartalmazza. A π periódusú gyök geometriailag azt jelenti, hogy a gyökök páronként egy-egy origón átmenő egyenesen helyezkednek el. Hogy ez milyen komoly elvi hiba, elég utalni rá, hogy a hiperbola és az $x-y=0$ egyenletű egyenes két metszéspontja közül az egyik az origó, ez pedig nem is pontja a H_1-nek! A rajz elárulja, hogy a gyökökhöz tartozó egységvektorok egy „Mercedes-csillagot" feszítenek ki,

ezért a gyökök: $x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{2\pi}{3}$, ahol $k\in\mathbf{Z}$. A $\sin 2x$-re másodfokú egyenlet két gyöke: $\sin 2x=1$; $\sin 2x=-\frac{1}{2}$. E három egységvektor is „Mercedes-csillagot" feszít ki. A megoldó egy hatszöget adott meg. A rajz mutatja, hogy a hamis gyökök: $x'=-\frac{3\pi}{4}+k\cdot\frac{2\pi}{3}$, ahol $k\in\mathbf{Z}$, szintén „Mercedes-csillagot" határoznak meg és gyökei a $(\sin x)^{-1}+(\cos x)^{-1}=-2\sqrt{2}$ egyenletnek.

Felvetődik a kérdés, hogy szükséges-e a négyzetre emelés az egyenlet megoldásához. Nem. Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát $\sqrt{2}$-vel a törtek eltávolítása után:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos x=2\sin x\cdot\cos x.$$

Tehát:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x,$$

amelyből vagy

$$x_1=\frac{\pi}{4}+2k\pi,$$

vagy pedig

$$3x+\frac{\pi}{4}=\pi+n\cdot 2\pi, \quad \text{és ebből}$$

$$x=\frac{\pi}{4}+n\cdot\frac{2\pi}{3}.$$

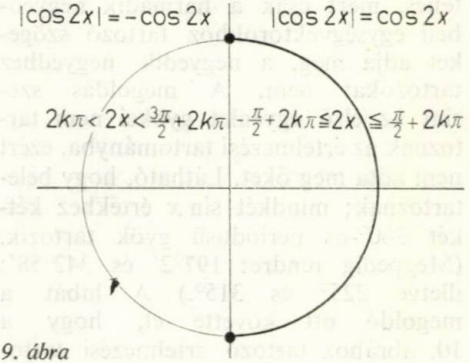
Mint látjuk, x_1 benne van x-ben, vagyis x_1 „kettős" gyök, ez nem is meglepő, ha észrevesszük, hogy H_1 érinti az egységkört a $(\cos\frac{\pi}{4};\ \sin\frac{\pi}{4})$ pontban.

Az egységsugarú kört tapasztalataim szerint nem elég következetesen használják az oktatásban. A Felvételi feladatok **538.** feladata: $2\sin x+\sqrt{2}=|\cos 2x|$.

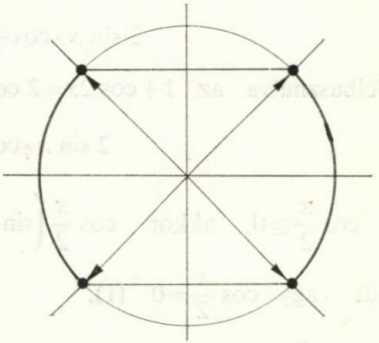
A megoldás helyesen választja két részre a feladatot, helyesek a kapott egyenletek is, mégis teljesen rossz a megoldás, mert nem használta a megoldó az egységsugarú kört. A 9. ábra $2x$-re mutatja a két értelmezési tartományt. A 10. ábrához tartozó tartományban egyenletünk: $2\sin x+\sqrt{2}=\cos 2x$; míg a 11. ábrához tartozó tartományban $2\sin x+\sqrt{2}=-\cos 2x$.

A 10. ábrához tartozó egyenlet $2\sin^2 x+2\sin x+\sqrt{2}-1=0$. Ennek gyökei:

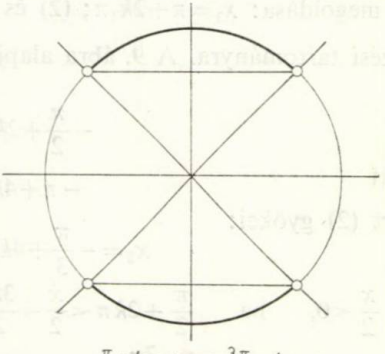
$$\sin x=-0{,}2929 \quad \text{vagy} \quad \sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



9. ábra



10. ábra $-\frac{\pi}{4}+k\pi\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}+k\pi$



11. ábra $\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{3\pi}{4}+k\pi$

A 11. ábrához tartozó egyenlet: $2\sin^2 x - 2\sin x - \sqrt{2} - 1 = 0$. Ennek gyökei azonosak a megoldásban közölt gyökökkel, azzal a megjegyzéssel azonban, hogy a $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$-höz tartozó egységvektorok szorosan nem ebbe, hanem a másik tartományba tartoznak. Egyébként a megadott gyök nem teljes, mert csak a harmadik negyedbeli egységvektorokhoz tartozó szögeket adja meg, a negyedik negyedhez tartozókat nem. A megoldás szerint az első egyenlet gyökei nem tartoznak az értelmezési tartományba, ezért nem adta meg őket. Látható, hogy beletartoznak; mindkét $\sin x$ értékhez kétkét 360°-os periódusú gyök tartozik. (Mégpedig rendre: 197°2′ és 342°58′; illetve 225° és 315°.) A hibát a megoldó ott követte el, hogy a 10. ábrához tartozó értelmezési tartományt rosszul állapította meg. Nyilván nem a 9. ábrából indult ki; erre utal, hogy szerinte $\cos 2x \geqq 0$, ha $k\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}(4k+1)$ és $\frac{\pi}{4}(4k+3) \leqq x \leqq k\pi$.

Nem akarok kötözködni az „és"-en, hiszen itt matematikailag nyilván „vagy" a helyes, de a második intervallum teljesen értelmetlen, hiszen a bal oldal nagyobb, mint a jobb oldal, tehát a $\leqq$ jel itt értelmetlen. A $\geqq$ jel viszont hibás intervallumot ad, ezért hiányzik a negyedik és második negyedbe eső intervallum: $\frac{\pi}{4}(4k-1) \leqq x \leqq k\pi$. Úgy gondolom, hogy az ábra használatának az előnyeiről még a tanár is nehezen mondhat le, hát még a diák!

Az értelmezési tartomány okoz nehézséget a következő egyenlet megoldásában is:

$$2\sin x \cdot \cos\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{3(1+\cos x)}{2}} = 0.$$

Felhasználva az $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$ azonosságot, egyenletünk így alakul:

$$2\sin x \cdot \cos\frac{x}{2} + \sqrt{3}\left|\cos\frac{x}{2}\right| = 0.$$

Ha $\cos\frac{x}{2} \geqq 0$, akkor $\cos\frac{x}{2}\left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$.

Tehát vagy $\cos\frac{x}{2} = 0$ (1), vagy $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2).

Ha $\cos\frac{x}{2} < 0$, akkor lehet vele osztani, ezért $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (3).

(1) megoldása: $x_1 = \pi + 2k_1\pi$; (2) és (3) megoldásához szükségünk van az értelmezési tartományra. A 9. ábra alapján $\cos\frac{x}{2}$ pozitív a jobb oldali félkörben, így

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

tehát

$$-\pi + 4k\pi < x < \pi + 4k\pi,$$

ezért (2) gyökei:

$$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 4k_2\pi, \quad x_3 = -\frac{2\pi}{3} + 4k_3\pi.$$

$\cos\frac{x}{2} < 0$, ha $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, tehát $\pi + 4k\pi < x < 3\pi + 4k\pi$,

így (3) gyökei: $x_4 = \frac{7\pi}{3} + 4k_4\pi$; $x_5 = \frac{8\pi}{3} + 4k_5\pi$, ahol $k_i \in Z$. $(i = 1, \ldots, 5)$.

Az egységsugarú kör mellett érdemes foglalkozni az egységátmérőjű körrel. Erre az jellemző, hogy az olyan háromszögek oldalai a szemben fekvő szögek sinusaival egyenlők, amelyeknek körülírt köre az egységátmérőjű kör.

A Felvételi feladatok **519.** *a), b)* és a Geometriai feladatgyűjtemény II. **434.** *e), f)* feladatok a következők:

Igazoljuk, hogy ha α, β és γ egy háromszög szögei, akkor:

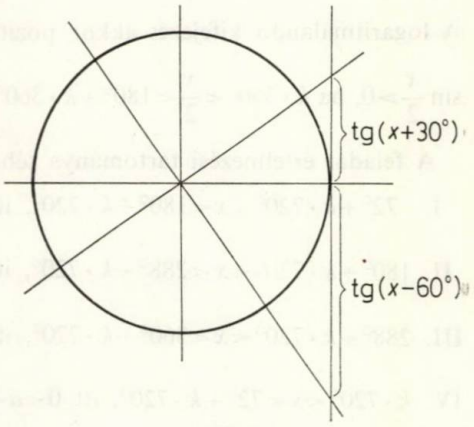
$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma = 2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma \quad (\textbf{434.}\ e));$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma = 1 \quad (\textbf{434.}\ f));$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma \quad (\textbf{519.}\ a));$$

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma = 2+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma \quad (\textbf{519.}\ b)).$$

A **434.** *e)* feladat az egységátmérőjű körbe írt háromszögre a cosinustétel. **434.** *f)*, **519.** *a)*, **519.** *b)* a következő egyenlettel azonos: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma=\sin^2\gamma$, hiszen az első kettőben $1-\cos^2\gamma$ helyett $\sin^2\gamma$-t írtam, a harmadikban pedig $\sin^2\alpha+\sin^2\beta$ helyett $(2-\cos^2\alpha-\cos^2\beta)$-t. Tükrözzük az egységátmérőjű kört tengelyesen az AB oldalra! Ez a kör átmegy az ABC háromszög M magasságpontján. Az ABM háromszög is egységátmérőjű körbe írt háromszög, tehát $AM=\sin MBA\sphericalangle=\cos\alpha$; $BM=\sin MAB\sphericalangle=\cos\beta$; vegyük még észre, hogy $AMB\sphericalangle+ACB\sphericalangle=180°$, tehát ABM-re a cosinustétel a bizonyítandó állítást adja.



12. ábra

Felvételi feladatok **530.**:

$$\operatorname{tg}(x+30°)\cdot\operatorname{tg}(x-60°)=-1.$$

A 12. ábra szemlélteti a két tangensértéket, tekintve hogy a két szög különbsége 90°. A magasságtétel értelmében, figyelembe véve, hogy a két tangensérték különböző előjelű, azonosságról van szó, valahányszor létezik a két tangensérték. Ezek pedig léteznek, ha $x\neq 60°+k\cdot 90°$, ahol $k\in\mathbf{Z}$.

Végül néhány mintafeladat felvételi előkészítő számára.

Legyen

$$a=\frac{1+\cos 288°}{1+\cos x}.$$

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:

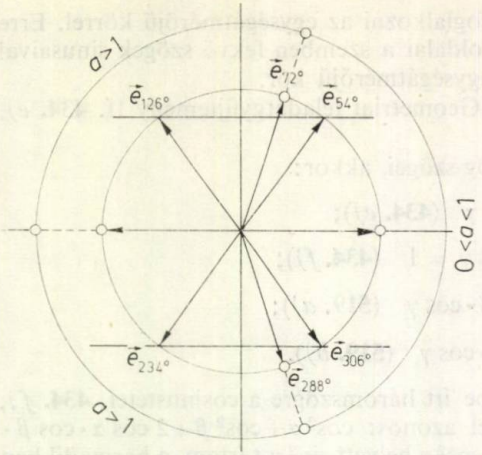
$$\log_a 2\sin\frac{x}{2}\leqq\frac{1}{2}.$$

A logaritmus alapja pozitív és nem egyenlő 1-gyel, ezért $\cos x\neq -1$; $\cos x\neq\cos 288°=\cos 72°$.

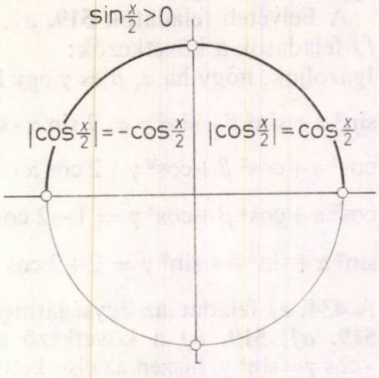
Az alap nagyobb egynél, ha

$$72°+k\cdot 360°<x<288°+k\cdot 360°,\ x\neq 180°+k\cdot 360°,$$

viszont $0<a<1$, ha $-72°+k\cdot 360°<x<72°+k\cdot 360°$ (13. ábra).



13. ábra



14. ábra

A logaritmálandó kifejezés akkor pozitív, amikor $\sin\frac{x}{2}>0$, de a 14. ábra szerint $\sin\frac{x}{2}>0$, ha $k\cdot 360°<\frac{x}{2}<180°+k\cdot 360°$, tehát $k\cdot 720°<x<360°+k\cdot 720°$.

A feladat értelmezési tartománya tehát:

I. $72°+k\cdot 720°<x<180°+k\cdot 720°$, itt $a>1$, $\cos\frac{x}{2}>0$;

II. $180°+k\cdot 720°<x<288°+k\cdot 720°$, itt $a>1$, $\cos\frac{x}{2}<0$;

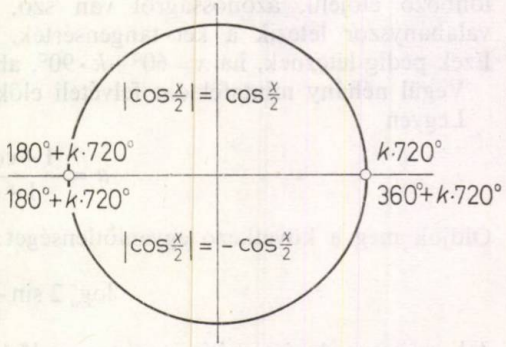
III. $288°+k\cdot 720°<x<360°+k\cdot 720°$, itt $0<a<1$, $\cos\frac{x}{2}<0$;

IV. $k\cdot 720°<x<72°+k\cdot 720°$, itt $0<a<1$, $\cos\frac{x}{2}>0$. (15. ábra.)

Az egyenlőtlenség jobb oldala:

$$\frac{1}{2}=\log_a\sqrt{\frac{1+\cos 288°}{1+\cos x}}=$$

$$=\log_a\sqrt{\frac{2\cos^2 144°}{2\cos^2\frac{x}{2}}}=\log_a\frac{\sin 54°}{\left|\cos\frac{x}{2}\right|}.$$



15. ábra

Az I. és II. intervallumban a logaritmusfüggvény szigorúan monoton nő, ott tehát $2\sin\frac{x}{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|\leqq\sin 54°$.

A III. és IV. intervallumban a logaritmusfüggvény szigorúan monoton fogy, tehát ott $2\sin\frac{x}{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|\geqq\sin 54°$. $\left(\left|\cos\frac{x}{2}\right|>0\right.$ miatt szabad volt mindkét esetben szorozni.$\left.\right)$

Bontsuk fel; az abszolútérték-jelet; akkor

az I. intervallumban $\sin x \leqq \sin 54°$,
a II. intervallumban $-\sin x \leqq \sin 54°$, vagyis $\sin x \geqq -\sin 54°$,
a III. intervallumban $-\sin x \geqq \sin 54°$, vagyis $\sin x \leqq -\sin 54°$,
a IV. intervallumban $\sin x \geqq \sin 54°$.

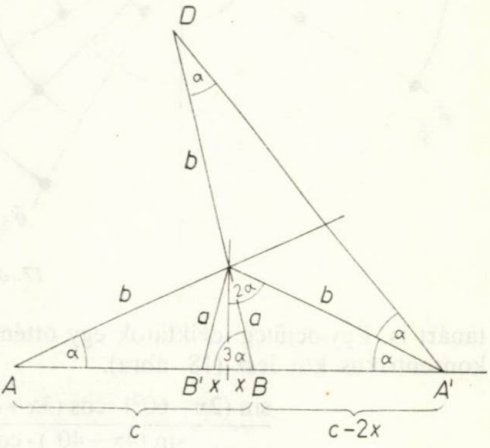
Tehát a megoldás

az I. intervallumban: $126° + k \cdot 720° \leqq x < 180° + k \cdot 720°$,
a II. intervallumban: $180° + k \cdot 720° < x \leqq 234° + k \cdot 720°$,
a III. intervallumban: $288° + k \cdot 720° < x \leqq 306° + k \cdot 720°$,
a IV. intervallumban: $54° + k \cdot 720° \leqq x < 72° + k \cdot 720°$.

Adjunk meg összefüggést a háromszög oldalai között, ha az egyik szög kétszer akkora, mint a másik; illetve az egyik szög háromszor akkora, mint a másik!

A 16. ábrán tekintsük az $A'BC$ háromszöget! Hozzáillesztettem az $A'CD$ egyenlő szárú háromszöget. Ezért $A'BC$ és DBA' háromszögek hasonlók; vegyük mindkét háromszögben a kétszeres és egyszeres szöggel szemben fekvő oldalak arányát: $c' : a = (b+a) : c'$; innen: $c'^2 = a(b+a)$. Itt $a < b$.

A 16. ábrán az ABC háromszögben $ABC\sphericalangle = 3 \cdot CAB\sphericalangle$. Tükrözzük e háromszöget az AB oldalhoz tartozó magasságra; így kaptuk az $A'B'C$ háromszöget. Az $A'BC$ háromszögnek 3α külső szöge, tehát $BCA'\sphericalangle = 2\alpha$.



16. ábra

Jelöljük BB'-t $2x$-szel! (x legyen pozitív, ha AB és BB' egyező irányítású, negatív, ha ellentétes irányítású; rajzunkon tehát x negatív számot jelent.)

A két derékszögű háromszögben közös a magasságra eső befogó, tehát $b^2 - (c+x)^2 = a^2 - x^2$, amelyből: $c(c+2x) = b^2 - a^2$, azaz $cc' = b^2 - a^2$. Így

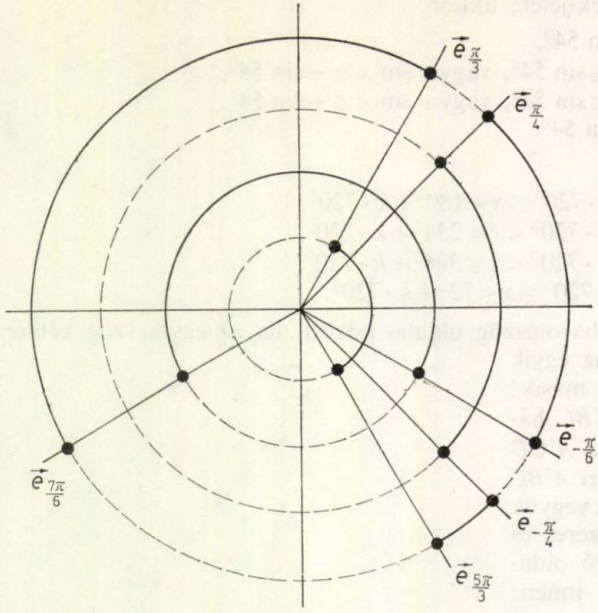
$$c = \frac{(b+a)(b-a)}{\sqrt{a(b+a)}} = (b-a)\sqrt{\frac{b+a}{a}}.$$

Végül oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:

$$\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leqq 0.$$

A 17. ábrán négy koncentrikus kör látható. Mindegyik körön fekete az a körív, amelyiken a hozzá tartozó tényező pozitív, és piros az a körív, amelyen a hozzá tartozó tényező negatív. A legbelső kör az első tényező előjeléről tájékoztat, és így tovább. A legnagyobb körön a szorzatról kapunk képet. A megoldás a legnagyobb körről olvasható le.

Ez az eljárás lényegesen egyszerűbb és áttekinthetőbb, mint a szokásos, amelyet szinte kizárólag két tényezőre alkalmaznak, és azzal kezdik, hogy két esetet kell vizsgálni. Világos, hogy három tényező esetén már négy, négy tényező esetén már nyolc esetet kellene vizsgálni, és ez riasztó zűrzavarral fenyegeti nemcsak a tanulót, hanem a



$$\frac{\pi}{4}+2k_1\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}+2k_1\pi \vee$$

$$\vee \frac{7\pi}{6}+2k_2\pi \leqq x \leqq \frac{5\pi}{3}+2k_2\pi \vee$$

$$\vee -\frac{\pi}{4}+2k_3\pi \leqq x \leqq -\frac{\pi}{6}+2k_3\pi$$

17. ábra

tanárt is. Egyidejűleg ideiktatok egy öttényezős vizsgálatot is, itt természetesen hat koncentrikus kör lesz (18. ábra).

$$\frac{\sin(2x-60°)\cdot\cos(3x+45°)\cdot\cos(x-30°)}{\sin(4x+40°)\cdot\cos(x-60°)} \leqq 0.$$

Szín hiányában például a negatív tényező szaggatott, a pozitív tényező teljes vonallal húzható. A táblán a negatív tényező jelzésére a legjobban látható sárga, a pozitív tényezőére a piros színt használom.

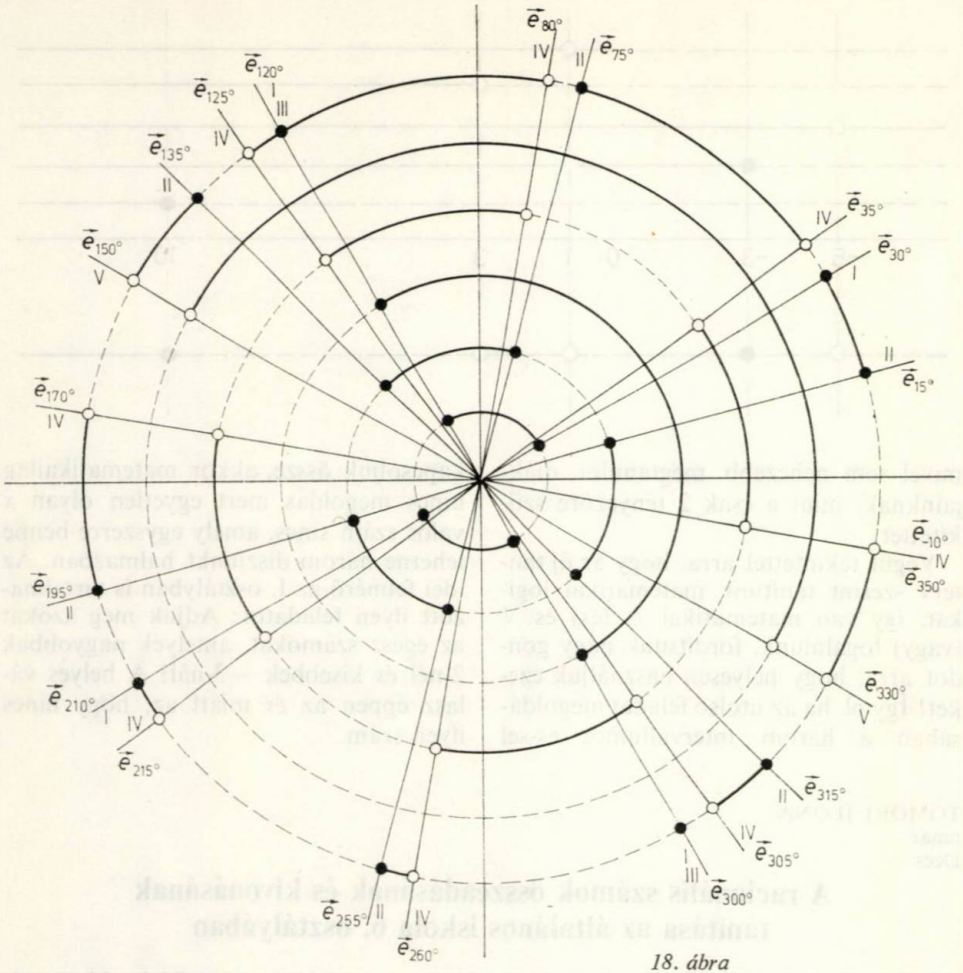
$$-10°+k_1\cdot 360° < x \leqq 15°+k_1\cdot 360° \vee 30°+k_2\cdot 360° \leqq x < 35°+k_2\cdot 360° \vee$$
$$\vee 75°+k_3\cdot 360° \leqq x < 80°+k_3\cdot 360° \vee 125°+k_4\cdot 360° < x \leqq 135°+k_4\cdot 360° \vee$$
$$\vee 150°+k_5\cdot 360° < x < 170°+k_5\cdot 360° \vee 195°+k_6\cdot 360° \leqq x \leqq 210°+k_6\cdot 360° \vee$$
$$\vee 215°+k_7\cdot 360° < x \leqq 255°+k_7\cdot 360° \vee 260°+k_8\cdot 360° < x < 305°+k_8\cdot 360° \vee$$
$$\vee 315°+k_9\cdot 360° \leqq x < 330°+k_9\cdot 360°, \text{ ahol } k_i \in Z.$$

Az idei szóbeli felvételi feladatok között volt ilyen típusú: Mely valós x-ekre értelmezhető a következő kifejezés:

$$\sqrt{\frac{x^2-7x-30}{(x+5)(x^2-4x+3)}}.$$

A felvételizőknek már a szorzattá alakítás is problémát jelentett, pedig a gyöktényezős alakot mindenki tanulta, majd a szorzattá alakítás után nem tudtak tovább menni, mert a tényezők száma 2-nél nagyobb volt. Nézzük most a jól tipizálható megoldást: alakítsuk szorzattá a két másodfokú kifejezést! (Vagyis keressük meg a 0-helyeket, és írjuk fel a gyöktényezős alakot!) Így feladatunk a következő egyenlőtlenség megoldását jelenti:

$$\frac{(x-10)(x+3)}{(x+5)(x-3)(x-1)} \geqq 0.$$



18. ábra

Most számegyenesen ábrázoljuk mindegyik tényező előjelfüggvényét: ahol a tényező pozitív, ott folytonos, ahol negatív, ott szaggatott vonal, ahol 0, ott vagy „bunkó", vagy karika attól függően, hogy a kifejezés értéke 0, vagy nincs értelmezve. Végül a szorzatot látjuk. Ily módon a számegyenesen kívül 6 párhuzamos egyenes látható a rajzon (19. ábra).

Tehát az adott kifejezés azokra a valós x-ekre értelmezhető, amelyekre fennáll:

$$-5<x\leqq -3 \vee 1<x<3 \vee x\geqq 10.$$

A „csatavesztés" oka az a tankönyvben is rögzített, kéttényezős szemlélet: „Egy szorzat akkor és csakis akkor pozitív, ha mindkét tényezője egyenlő előjelű stb." Nyilván ez az állítás csak kéttényezős szorzatra igaz.

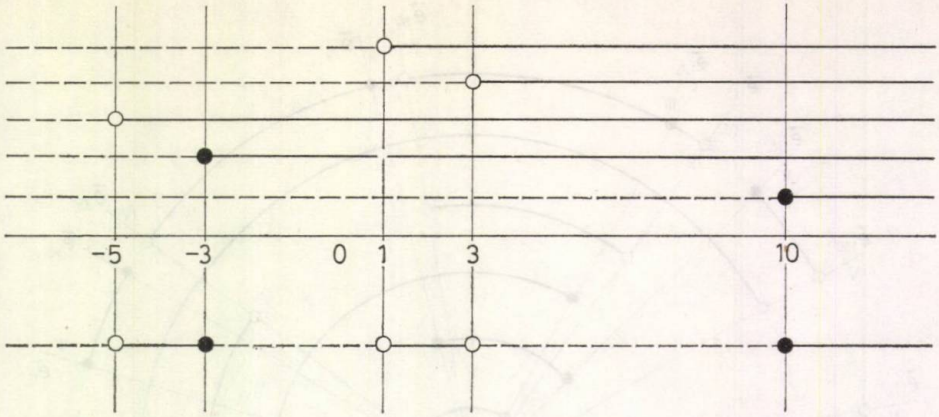
Akárhány tényezőre igaz a következő három állítás:

A szorzat 0, ha legalább egy tényezője 0.

Egy szorzat akkor és csak akkor pozitív, ha egyik tényezője sem 0, és a negatív tényezők száma páros.

Egy szorzat akkor és csakis akkor negatív, ha egyik tényezője sem 0, és a negatív tényezők száma páratlan.

Így a sémán csak a szaggatott tényezők számát kell megnézni! A tényezők számától függően helyes állítást sem-



mivel sem nehezebb megtanulni diákjainknak, mint a csak 2 tényezőre szűkítettet.

Végül tekintettel arra, hogy az új tanterv szerint tanítunk matematikai logikát, így van matematikai $\wedge$ (és) és $\vee$ (vagy) fogalmunk, fordítsunk nagy gondot arra, hogy helyesen használjuk ezeket! Így pl. ha az utolsó feladat megoldásában a három intervallumot és-sel kapcsoljuk össze, akkor matematikailag nincs megoldás, mert egyetlen olyan x valós szám sincs, amely egyszerre benne lehetne három diszjunkt halmazban. Az idei felmérő az I. osztályban is tartalmazott ilyen feladatot: Adjuk meg azokat az egész számokat, amelyek nagyobbak 2-nél *és* kisebbek —3-nál! A helyes válasz éppen az *és* miatt az, hogy nincs ilyen szám.

TOMORI ILONA
tanár
Decs

A racionális számok összeadásának és kivonásának tanítása az általános iskola 6. osztályában

Nagy gondot okoz mindig a racionális számok összeadásának és főként kivonásának tanítása, mert rövid időn belül vissza kell térnünk a megtanított szabály emlékezetből való felidézéséhez, ha a tanuló megakad ennél.

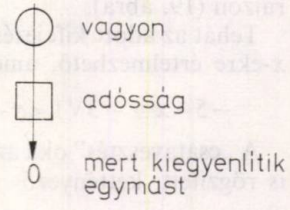
Ebben az évben jutottam el először az ideiglenes matematika-tanterv 6. osztályos anyagában ehhez a részhez. Már — a gyerekekkel együtt — hozzászoktunk ahhoz, hogy amit csak lehet, segédeszközökkel közelítünk meg. A kézikönyv által ajánlott módszert nem találtam elég meggyőzőnek, és a tanulók által készített cédulák helyett a meglevő eszközöket szerettem volna felhasználni. Ezért választottam ki a logikai készlet karikáit és négyzeteit, ezek lettek a pozitív, illetve negatív egység jelei.

A velük való számítási és szemléltetési módot itt írom le.

Két dolgot kell a műveletek kirakása előtt tisztázni magunknak is, a gyerekeknek is:

1. *A körök* (függetlenül színüktől, nagyságuktól, simaságuktól) *pozitív* egységeket jelentenek (vagyont, bevételt, többletet, magasságot stb).

A négyzetek (függetlenül színüktől, nagyságuktól, simaságuktól) *negatív* egységeket jelentenek (adósságot stb.).

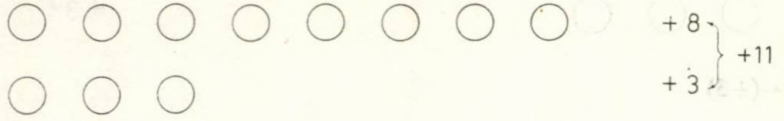


2. Egy kör és egy négyzet együtt azt jelenti, hogy mindkettő *jelen van* ugyan, az „egyenleg" mégis *zérus*.

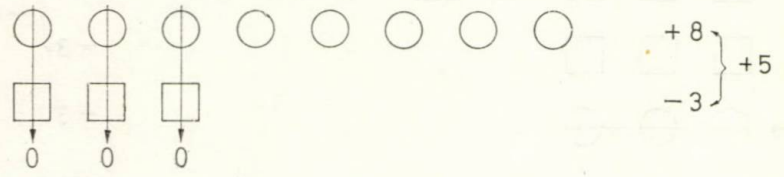
Ezek alapos tisztázása, megértése után következik a műveletek kirakása, miután a műveleteket felírtuk a táblára.

I. *Összeadás*

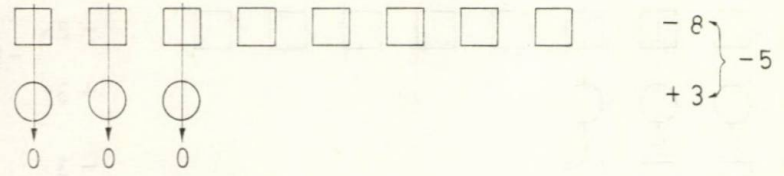
1. (+8)+(+3)



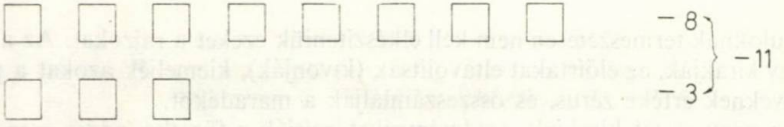
2. (+8)+(−3)



3. (−8)+(+3)



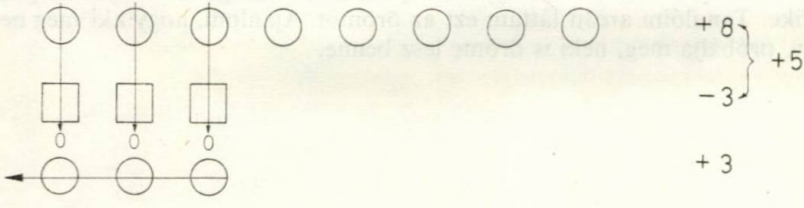
4. (−8)+(−3)



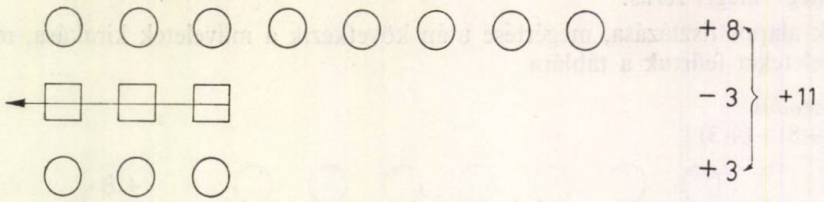
II. *Kivonás*

A tanulóknak nagyon fontos, hogy amit elvesznek, amit kivonnak, az konkrét, valóságosan jelenlevő mennyiség legyen. Ezt csak úgy lehet megtenni — közöljük —, ha zérus formájában már a „kisebbítendőben" megvolt. Például a (−5)−(+3) akkor végezhető el, ha feltételezzük, hogy az 5 egységnyi adósság mellett még legalább 3 Ft vagyon — és természetesen ugyanannyi forint adósság — is jelen volt. Négyzetekkel és körökkel ez sokkal egyszerűbb. Rakjuk ki!

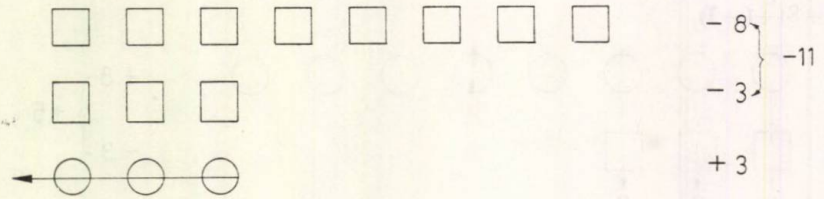
1. (+8)−(+3)



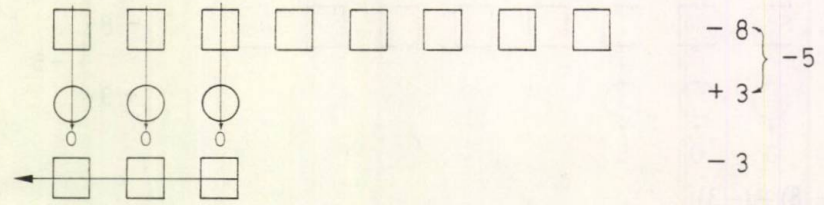
2. $(+8)-(-3)$



3. $(-8)-(+3)$



4. $(-8)-(-3)$



A tanulóknak természetesen nem kell elkészíteniük ezeket a rajzokat. Az a feladatuk, hogy kirakják, az előírtakat eltávolítsák (kivonják), kiemeljék azokat a párokat is, amelyeknek értéke zérus, és összeszámlálják a maradékot.

Mire a négy esetet kirakják, eredményeiket beírják a füzetbe, addig meg is értik a kivonás lényegét. Öröm nézni a gyengébb tanulók sikerét.

Ezután már teljesen önállóan rakják ki a táblára felírt kivonásokat, megfigyelik hogyan, mikor csökken vagy nő a különbség a kisebbítendőhöz képest. Ezt kell rögzítenünk, erre kell hivatkoznunk később és nem szabályra.

A tanulók tulajdonképpen azt a nagyon gyakran használt matematikai formulát értik meg, szemlélik, amely a későbbiek során is sokszor fordul elő ($a-b=c$; $a-b+b=c+b$; vagy az egyenletrendezésnél, vagy mint megoldáshoz vezető egyszerűbb út stb.).

A kedves Öveges tanár úr írja egyik könyvében: ... a megértés öröme a legnagyobbak egyike. Tanulóim arcán láttam ezt az örömöt. Ajánlom, hogy aki még nem csinálta így, próbálja meg, neki is öröme lesz benne.

FELADATOK

Rovatvezető: POGÁTS FERENC

A megoldásokat kérjük a rovatvezető címére küldeni: Budapest, Petőfi Sándor utca 10. II. 10., 1052. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljük! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak különböző megoldásait is) külön lapra írjuk tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsuk össze és külső felére írjuk rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljunk a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: a lap kézbesítésétől számított 20. nap.

945. Egy százas számrendszerben felírt szám egyenlő számjegyeinek négyzetösszegével. Melyik ez a szám?

Bakos Tibor, Budapest

946. Bizonyítsuk be, hogy a

$$4x_{n+1} = \sqrt{6}\left(x_n + \sqrt{1-x_n^2}\right) + \sqrt{2}\left(x_n - \sqrt{1-x_n^2}\right)$$

$$x_1 = a \quad (0 \leqq a \leqq 1)$$

feltételekkel definiált (x_n) számsorozat periodikus! Mekkora a periódusa?

Bencze Mihály, Brassó

947. Adott két számegyenes, egyenlő hosszúságú egységekkel. Bizonyítsuk be, hogy az azonos valós számoknak megfelelő pontokat összekötő szakaszok felezőmerőleges síkjai egyállásúak vagy egy egyenesre illeszkednek!

Németh László, Vasvár

948. Adott egy k kör és négy érintője. Bizonyítsuk be, hogy a nem szomszédos érintők érintési pontjai és a négy érintő adta négyszög két átlójának metszéspontja egy-egy egyenesen van!

Vigassy Lajos, Budapest

949. Jelölje α_n az

$$f_n\colon x \mapsto -1 + \sum_{k=1}^{2n} x^k \quad (n \text{ pozitív egész})$$

polinomfüggvény valós zérushelyei szorzatának az abszolút értékét. Bizonyítsuk be, hogy a $\lim_{n\to\infty} f_n(\alpha_n)$ létezik, és határozzuk is meg!

Bartha Gábor, Szentendre

950. Adott egy K kerületű, T területű egyenlő szárú háromszög. Bármely $t<T$ pozitív valós számra hány (nem egybevágó) t területű, K kerületű egyenlő szárú háromszög van?

Feladatmegoldások (927—932.)

927. Igazoljuk, hogy minden n pozitív egész számra teljesül az

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\binom{n+1}{2}} \leqq \prod_{k=1}^{n} k^k \leqq \left(\frac{2n+1}{3}\right)^{\binom{n+1}{2}}$$

egyenlőtlenséglánc!

Nagy Ferenc, Hajdúnánás

Megoldás: Ha H_n, G_n, A_n jelöli rendre n darab pozitív szám harmonikus, mértani, illetve számtani közepét, akkor az ismert

$$H_n \leqq G_n \leqq A_n$$

egyenlőtlenséglánc felhasználásával, az $\binom{n+1}{2}$ darab elemből álló és k darab k pozitív egészt ($k=1, 2, \ldots, n$) tartalmazó számsokaság elemeire:

$$G_{\binom{n+1}{2}}^{\binom{n+1}{2}} = \prod_{k=1}^{n} k^k,$$

$$A_{\binom{n+1}{2}}^{\binom{n+1}{2}} = \left(\frac{1+2\cdot 2+3\cdot 3+\ldots+n\cdot n}{\binom{n+1}{2}}\right)^{\binom{n+1}{2}} = \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6\binom{n+1}{2}}\right)^{\binom{n+1}{2}} = \left(\frac{2n+1}{3}\right)^{\binom{n+1}{2}} \text{ és}$$

$$H_{\binom{n+1}{2}}^{\binom{n+1}{2}} = \left(\frac{\binom{n+1}{2}}{1+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{3}+\ldots+n\cdot\frac{1}{n}}\right)^{\binom{n+1}{2}} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\binom{n+1}{2}}.$$

Ezekből pedig következik állításunk. Az is nyilvánvaló, hogy az egyenlőség csakis akkor teljesül, ha $n=1$.

Bencze Mihály, Brassó és Tuzson Zoltán, Marosvásárhely

Megjegyzés: Élesebb korlátokat adhatunk a $\prod_{k=1}^{n} k^k$-nak, ha az $x \mapsto x \ln x$ függvény — alkalmas intervallumokon vett — integráljait vizsgáljuk. Mivel

$$\int_1^n x\cdot\ln x\,dx \leqq \ln \prod_{k=1}^{n} k^k = \sum_{k=1}^{n} k\cdot\ln k \leqq \int_1^{n+1} x\cdot\ln x\,dx,$$

ezért

$$\frac{n^2}{2}\cdot\ln n-\frac{n^2}{4}+\frac{1}{4} \leqq \sum_{k=1}^{n} k\cdot\ln k \leqq \frac{(n+1)^2}{2}\cdot\ln(n+1)-\frac{(n+1)^2}{4}+\frac{1}{4},$$

amiből

$$e^{\frac{n^2}{2}\cdot\ln n-\frac{n^2-1}{4}} \leqq \prod_{k=1}^{n} k^k \leqq e^{\frac{(n+1)^2}{2}\cdot\ln(n+1)-\frac{(n+1)^2-1}{4}}.$$

Bencze Mihály, Brassó

A megoldók száma: 17.

928. Egy 3×3 mezőből álló sakktábla középső mezejére a 660 van írva. Írjunk a többi mezőre is egy-egy pozitív egész számot úgy, hogy olyan bűvös négyzet keletkezzék, amelynek sorai, oszlopai, illetve átlói az 1980-at adják összegül! Hány különböző kitöltés lehetséges? Hány olyan van ezek közt, amelynek a kilenc számát nem csökkenő sorrendben felírva kilenctagú számtani sorozatot kapunk?

Bakos Tibor, Budapest

I. megoldás: Nyilvánvaló, hogy a bűvös négyzet bármelyik n elemére $1 \leqq n \leqq 1319$ kell legyen, továbbá két független érték — x és y — a többi hatot egyértelműen meghatározza. Ugyanis, ha ezek között van sarokmezőhöz tartozó — például x — (lásd az 1. ábrát), akkor az ezzel átellenes sarokmezőre kerülő elem csakis az $1320-x$ lehet.

x	y	$1980-x-y$
$2640-2x-y$	660	$2x+y-1320$
$x+y-660$	$1320-y$	$1320-x$

1. ábra

	x	
$1320-y$	660	y
	$1320-x$	

2. ábra

Az y pedig valamelyik sor vagy oszlop második eleme, s így ezek harmadik eleme is egyértelmű. Ebből viszont már egyértelműen adódik a hiányzó elemek értéke. Ha viszont az x, y független értékpár egyike sem tartozik sarokmezőhöz, akkor csakis a 2. ábra szerinti elhelyezkedésük lehetséges. Ebben az esetben is könnyen látható, hogy a sarokmezőkbe kerülő számok egyértelműek.

Az elmondottakból következik, hogy

$$0 < x < 1320,$$

$$0 < y < 1320,$$

$$660 < x+y < 1980,$$

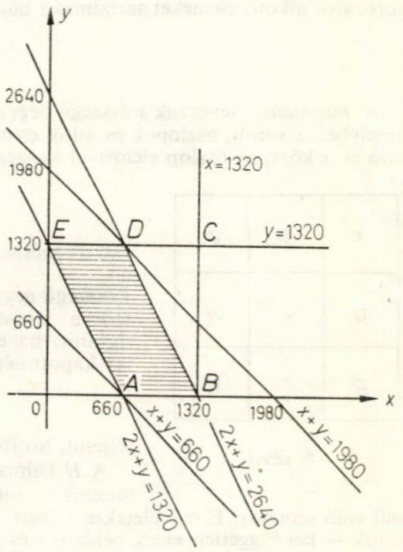
$$1320 < 2x+y < 2640.$$

Sakktáblánkat tehát annyiféleképpen tölthetjük ki, ahány — a fenti egyenlőtlenségláncoknak eleget tevő — (x, y) egész számokból álló számpár létezik.

Grafikusan ábrázolva, a négy egyenlőtlenségláncnak egy-egy sáv belseje felel meg, így feladatunk e sávok közös részébe, az $ABDE$ paralelogramma belsejébe eső rácspontok leszámlálása (3. ábra).

Az $OBCE$ négyzeten 1321^2 rácspont van. Az OAE és BCD egybevágó háromszögeken levő rácspontok száma az $OADE$ téglalapon levő rácspontok számánál annyival több, ahány rácspont van a BD szakaszon, azaz 661-gyel. Tehát levonva még az AB és ED szakaszok belsejében levő rácspontok számát, az $ABDE$ paralelogramma belsejében

$$1321^2-(661\cdot 1321+661)-2\cdot 659 = 869\,881$$



3. ábra

rácspont van, vagyis ennyiféleképpen tölthető ki sakktáblánk. A bűvös négyzet kilenc eleme akkor ad számtani sorozatot, ha nem csökkenő sorrendbe írva, ezek:

$$660-4d,\ 660-3d,\ 660-2d,\ 660-d,\ 660,\ 660+d,\ 660+2d,\ 660+3d,\ 660+4d.$$

A középső elem valóban a 660, mert a négyzet három sorának összege $3\cdot 1980$, és ez a középső elem kilencszerese. Mivel $660-4d>0$ kell legyen, ezért

$$0 \leqq d \leqq 164.$$

Ha $d>0$, akkor a sorozat elemei különböző számok.

Az 1. ábráról leolvasható, hogy bármely sarokmezőben álló szám a tőle „lóugrásra" levő két szám számtani közepe, ezért a sarokmezőkben a $660\pm 4d$ számok egyike sem állhat. Ezek tehát a középső sorban vagy oszlopban vannak (4. ábra). Ebből az is következik, hogy a $660\pm 2d$ számok is az utóbb említett, üresen maradt sorban (oszlopban) kell legyenek, különben vagy a $660\pm 6d$ is elemei a sorozatnak, vagy pedig a $660\pm 2d$ számokból 2-2 kell legyen.

	$660+4d$	
$660-2d$	660	$660+2d$
	$660-4d$	

4. ábra

$660-d$	$660+4d$	$660-3d$
$660-2d$	660	$660+2d$
$660+3d$	$660-4d$	$660+d$

5. ábra

Így a bűvös négyzet az 5. ábrán látható módon tölthető ki a számtani sorozat elemeivel. Ebből — minden rögzített $d>0$ mellett — további hét származtatható a négyzet szimmetriatengelyeire való tükrözésekkel, illetve a középpontja körüli negyedrendű elforgatásokkal. Ezért a számtani sorozatot alkotó elemeket tartalmazó bűvös négyzetek száma:

$$1+8\cdot 164 = 1313.$$

Kamarás Lajos, Pécs

II. megoldás: Nevezzük s összegű négyzetnek azt a pozitív egész számokból álló bűvös négyzetet, amelyben a sorok, oszlopok és átlók elemeinek összege s. Ha a 6. ábra ilyen négyzet, akkor a két átló és a középső oszlop elemeinek összegéből levonva az első és a harmadik sor összegét,

x	y	z
u	v	w
p	r	q

6. ábra

$$3v=s \tag{1}$$

összefüggéshez jutunk, tehát $v=\frac{s}{3}$ mindig a négyzet középső eleme. Az s összegű négyzetek számát fogjuk meghatározni. Ezért tekintsük először a *zérusösszegű* négyzetek H halmazát. Ilyen négyzethez jutunk ugyanis, ha egy s összegű négyzet minden eleméből v-t levonunk. Az így kapott négyzet bármely h elemére

$$-v+1 \leqq h \leqq v-1 \tag{2}$$

teljesül, továbbá a középső elem (1) miatt 0.

A H halmaz elemein mint speciális 3×3 típusú mátrixokon értelmezzük — szokásos módon — az összeadást és a pozitív egész számmal való szorzást! E műveletekre H zárt. A H bármely négyzetét — mint az előbbi megoldásban láttuk — két független elem, például x és y (6. ábra), egyértelműen meghatározza.

Tekintsük H ama négyzeteit, amelyeknek elemei a 0, 1, -1 számok közül valók. Ezek, mint könnyen látható:

$$E=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}.$$

Az utóbbi négy négyzet első két eleméből készítsük el az $\mathbf{a}=(1,-1)$, $\mathbf{b}=(0,-1)$, $\mathbf{c}=(0,1)$ és $\mathbf{d}=(-1,1)$ vektorokat!

A H minden négyzetéhez ugyanígy hozzárendeljük — kölcsönös és egyértelműen — az első két x, y eleméből, tehát a négyzetet meghatározó elemekből álló $\mathbf{v}=(x,y)$ vektort.

Ismeretes, hogy a sík minden $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen állítható elő két független vektorának (ez esetben például: $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$) lineáris kombinációjaként, azaz

$$\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}=\mathbf{v}$$

alakban, ahol α, β egész számok, ha $\mathbf{v}$ rácspont helyvektora. Ugyanis koordinátákra áttérve

$$\alpha\cdot 1+\beta\cdot 0 = x$$

$$\alpha\cdot(-1)+\beta\cdot(-1) = y$$

egyenletrendszerből

$$\alpha = x, \quad \beta = -x-y.$$

A H elemein azonban csak pozitív egész számmal való szorzást engedtünk meg, ezért meg kell vizsgáljuk, hogy előbbi megállapításaink mennyiben módosulnak e feltétel mellett.

Ha $\alpha\cdot\beta>0$, akkor az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vagy a $\mathbf{d}, \mathbf{c}$ pár állítja elő $\mathbf{v}$-t pozitív együtthatókkal.

Ha $\alpha\cdot\beta<0$, akkor az $\mathbf{a}, \mathbf{c}$ vagy a $\mathbf{d}, \mathbf{b}$ pár ad pozitív együtthatókat.

Végül ha α, β egyike 0, akkor a $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{d}$ vektorok egyikének pozitív számszorosa a $\mathbf{v}$. Ezzel beláttuk: Ha $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$, akkor H bármelyik négyzete egyértelműen állítható elő vagy az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ egyikének pozitív egész számszorosaként, vagy az $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$, $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{c}$, $\alpha\mathbf{d}+\beta\mathbf{b}$, $\alpha\mathbf{d}+\beta\mathbf{c}$ pozitív lineáris kombinációk egyikeként.

A $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ többféleképpen is előállítható: $\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{d}=\mathbf{0}$.

Most már leszámlálhatjuk a $3v=s\neq 0$ összegű négyzeteket. Az előbbiek szerint, ha ezek minden elemét v-vel csökkentjük, akkor H-beli négyzethez jutunk. Így az s összegű négyzetek között $\alpha\mathbf{a}$ előállítású $v-1$ darab van, hiszen $1\leqq\alpha\leqq v-1$ kell legyen (2) miatt.

$\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$ előállítású négyzet pedig $1\leqq\alpha$, $1\leqq\beta$ és $\alpha+\beta\leqq v-1$ miatt

$$\sum_{k=1}^{v-2} k = \frac{(v-2)(v-1)}{2}$$

van. Ugyanis $\alpha=v-1-k$ $(1\leqq k\leqq v-2)$ választásra a β k darab különböző értéket vehet fel. Mivel mindkét típusú előállítás mellett 3-3 ugyanilyen típusú előállítás van, és ezek, mint láttuk, mind különböző s összegű négyzetet adnak, ezért a csupa v elemből álló, egyetlen négyzetet is figyelembe véve

$$4\left((v-1)+\frac{(v-1)(v-2)}{2}\right)+1 = 2v^2-2v+1$$

darab s összegű négyzet van.

Az E négyzet elemei zérus különbségű számtani sorozatot adnak.

A

$$3\mathbf{a}+\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$d=1$ különbségű négyzet. Ilyen összesen nyolc van, ugyanis a 3 elem a négy sarokmező bármelyikén állhat, s a mellette levő mező a -4 vagy a -2 elem bármelyike lehet.

A többi, kilencelemű számtani sorozatot adó négyzet e nyolc alapesetnek egész számú többszöröseként áll elő. Mivel esetünkben

$$1 \leqq d \leqq \left[\frac{v-1}{4}\right],$$

ezért az s összegű $2v^2-2v+1$ darab négyzet közül

$$8\left[\frac{v-1}{4}\right]+1 = 2v-7$$

számtani sorozatú van.

A $v=660$ helyettesítéssel előbbi megoldásunkban kapott eredményeinkhez jutunk.

Kamarás Lajos, Pécs

Megjegyzés: Más módszerrel, ugyanerre az általánosított eredményre jutott *Sugár György (Budapest)* is.

A feladat szövege szerint a 3×3 mező mindegyike kitüntetett (sakktábla!), ezért nem foglalkozunk külön annak leszámlálásával, hogy „lényegesen" különböző, a feltételeknek megfelelő négyzet hány van. Ezek száma 109 230, illetve 165. Az erre az eredményre vezető jó megoldásokat is elfogadtuk.

A megoldók száma: 10.

929. Bizonyítsuk be, hogy

$$\left(\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}k^2\right)-n(n-2)$$

osztható (2^n-1)-gyel, ha n pozitív egész szám!

Surányi János, Budapest

I. megoldás: Jelölje a feladatbeli különbséget S_n. Vizsgáljuk meg az első néhány n-re az S_n és az $\frac{S_n}{2^n-1}=Q_n$ hányadost!

n	1	2	3	4
S_n	2	9	42	165
Q_n	2	3	6	11

Mivel az $1\leqq n\leqq 4$-re, $Q_n=(n-1)^2+2$, ennélfogva azt sejtjük, hogy

$$S_n = Q_n\cdot(2^n-1). \tag{1}$$

Sejtésünket az n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. $n=1$-re beláttuk sejtésünk helyességét. Tegyük fel, hogy (1) igaz. Ekkor, felhasználva feltevésünket:

$$S_{n+1} = \left(\sum_{k=1}^{n+1} 2^{k-1}k^2\right)-(n+1)(n-1) = S_n+2^n(n+1)^2-(n+1)(n-1)+n(n-2) =$$

$$= 2^n[(n-1)^2+2+(n+1)^2]-(n-1)^2-2+1-2n = 2^n(2n^2+4)-n^2-2 = (2^{n+1}-1)(n^2+2) =$$

$$= Q_{n+1}(2^{n+1}-1).$$

Ezzel sejtésünket bizonyítottuk, ebből pedig következik a feladat állítása.

Burus Katalin és Burus Csaba, Székelyudvarhely és Sziky Csilla, Budajenő

II. megoldás: Tekintsük az $x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$ mellett az

$$f\colon x\mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \text{ függvényt.}$$

Ennek deriváltfüggvényét jelölje g, az $x\mapsto xg$ függvény deriváltfüggvényét pedig h! Mivel

$$g\colon x\mapsto \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2} \quad \text{és}$$

$$h\colon x\mapsto \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}k^2 = \frac{n^2x^{n+2}-(2n^2+2n-1)x^{n+1}+(n+1)^2x^n-x-1}{(x-1)^3},$$

ezért, ha $x=2$, úgy

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x^{k-1}k^2\right)-n(n-2) = h(2)-n(n-2) = 2^n(4n^2-4n-4n+2+n^2+2n+1)-3-n^2+2n =$$

$$= 2^n(n^2-2n+3)-(n^2-2n+3) = (2^n-1)(n^2-2n+3).$$

Ezzel a feladat állítását bizonyítottuk.

Bencze Mihály, Brassó, Gaál László, Valkó és Oláh György, Komarno

A megoldók száma: 20.

930. A háromszög szögeire teljesül a

$$\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma) = \operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$$

egyenlet. Milyen összefüggés van a háromszög oldalai közt?

Schandl Gábor, Zalaegerszeg

Megoldás:
Mivel

$$\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\cos\beta\cdot\cos\gamma}=\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos\beta\cdot\cos\gamma}=\frac{\sin\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\gamma},$$

így ha a hányados összefüggést írjuk egyenletünkbe, egyszerűsítés után:

$$\sin^2\alpha=\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos\alpha.$$

Felhasználva a háromszögre vonatkozó sinustételt

$$a^2=bc\cdot\cos\alpha$$

adódik. A háromszögre vonatkozó cosinustétel miatt

$$2bc\cdot\cos\alpha=b^2+c^2-a^2,$$

amit előbbi egyenletünkkel egybevetve:

$$3a^2=b^2+c^2$$

keresett összefüggést nyerjük.

Ungvári Jánosné, Debrecen

Megjegyzés: Ha a háromszög nem derékszögű, akkor az utóbbi, oldalak közötti összefüggés ekvivalens az eredeti — szögek közötti — egyenlettel. Megmutatjuk, hogy létezik olyan háromszög, amelynek oldalaira teljesül a $3a^2=b^2+c^2$ egyenlet. Tekintsünk egy olyan paralelogrammát, melynek átlói a, illetve $\sqrt{5}a$ hosszúak. E paralelogramma b és c oldalaira, valamint átlóira alkalmazva az ismert összefüggést (az oldalak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével): $2(b^2+c^2)=a^2+5a^2$, azaz $3a^2=b^2+c^2$. Tehát e paralelogramma két oldala és a átlója olyan háromszöget ad, amelyre teljesül a feltétel. Eljárásunkból az is következik, hogy a

$$\sqrt{5}\,|b-c|<\sqrt{5}a<b+c$$

egyenlőtlenséglánc is teljesül.

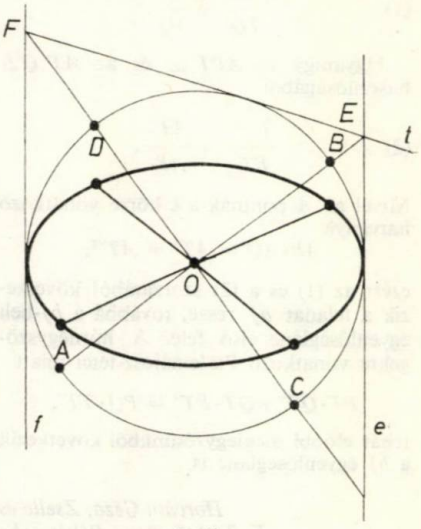
Vermes Miklós, Budapest

A megoldók száma: 26.

931. Adva van egy ellipszis az AB, CD konjugált átmérőpárjával. Az ellipszis egy t érintője messe az AB és CD egyenest E-ben, illetve F-ben! Az E-n és F-en átmenő másik érintő legyen e, illetve f. Bizonyítsuk be, hogy e és f párhuzamosak!

Vigassy Lajos, Budapest

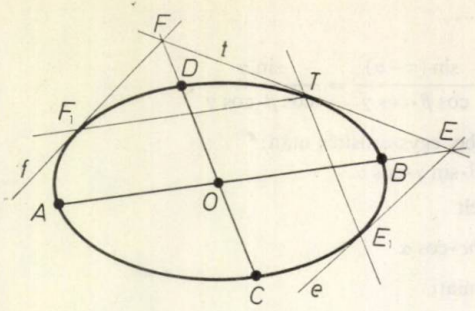
I. megoldás: Minden ellipszishez található olyan merőleges affinitás, amely az ellipszist főkörébe viszi. Ez az affinitás, illeszkedéstartó volta mellett, a konjugált átmérőpárt a főkör két egymásra merőleges átmérőjébe viszi. (Lásd például: Hajós György: Bevezetés a geometriába, 429. oldal.) Elegendő tehát az állítást körre igazolni (7. ábra). Erre viszont igaz, mert e tükörképe az AB egyenesre t, a t tükörképe a CD egyenesre f. Mivel $AB\perp CD$, és merőleges egyenesekre vonatkozó tükrözésszorzat az egyenesek közös pontjára vonatkozó tükrözés, ezért $e\|f$, hiszen e nem illeszkedik az O középpontra.



7. ábra

Imolya Sándor, Hódmezővásárhely

II. megoldás: Jelölje az e, t, illetve f érintők érintési pontjait rendre E_1, T, illetve F_1 (8. ábra). Azt fogjuk igazolni, hogy E_1F_1 átmérő, mert ebből az ellipszis centrálszimmetriája, továbbá az ellipszispontbeli érintő egyértelműsége miatt következik állításunk. Bizonyításunkban felhasználjuk a pontpárok konjugáltságának fogalmát, továbbá — centrális, közönséges másodrendű görbére vonatkozóan — a pólus, poláris fogalmát, illetve az ezekkel kapcsolatos tényeket (ezekre lásd: a már idézett könyv 467—479. oldalait). Az E pont polárisa E_1T, párhu-



8. ábra

zamos CD-vel, mert CD ideális pontja konjugált az AB átmérőegyenes minden pontjához, így E-hez is. Következésképp AB felezi az E_1T húrt. Hasonlóan nyerjük, hogy F polárisa F_1T, párhuzamos AB-vel és CD felezi az F_1T húrt. Az E_1TF_1 háromszög két középvonala AB, illetve CD az E_1F_1 oldal felezőpontjában, azaz 0-ban kell messe egymást, és ezt kellett igazolnunk.

Gaál László, Valkó

Megjegyzés: Megoldásaink — változtatás nélkül — akkor is helyesek, ha E és F pontok egyike ideális pont. (Mindkettő nem lehet ideális pont, hiszen az ellipszisnek csak közönséges egyenesek lehetnek érintői.) Ebben az esetben azonban az állítás az ellipszis egy átmérőjének két végpontjára illeszkedő érintőkről szól, amelyek párhuzamossága nyilvánvaló.

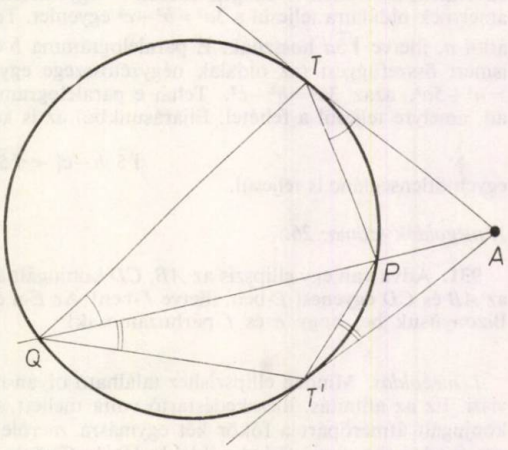
A megoldók száma: 21.

932. A C középpontú k körhöz a külső A pontból érintőket húzunk, az érintési pontok T, illetve T'. Az A ponton átmenő szelő messe k-t a P és Q pontban! Bizonyítsuk be, hogy érvényesek a

a) $$\frac{PT}{TQ} = \frac{PT'}{T'Q};$$

b) $$PT \cdot QT' = QT \cdot PT' = \frac{PQ \cdot TT'}{2}$$

összefüggések!



9. ábra

I. megoldás: Ha P jelöli az A-hoz közelebbi metszéspontot, akkor az $APT\triangle$ és az $ATQ\triangle$ hasonló, mert 2-2 szögük egyenlő (9. ábra).

A hasonlóság miatt

(1) $$\frac{PT}{TQ} = \frac{AT}{AQ}.$$

Ugyanígy az $APT'\triangle$ és az $AT'Q\triangle$ hasonlóságából

(2) $$\frac{T'Q}{PT'} = \frac{AT'}{AP}.$$

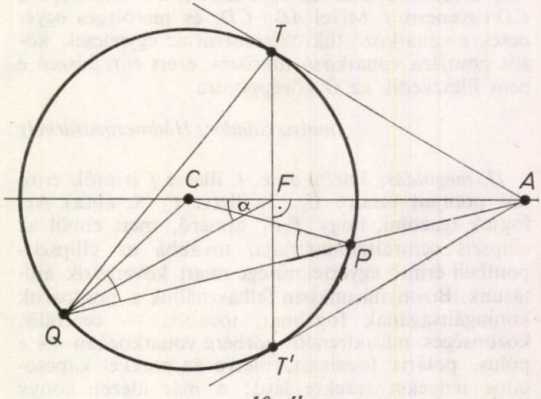
Mivel az A pontnak a k körre vonatkozó hatványa

$$AP \cdot AQ = AT^2 = AT'^2,$$

ezért az (1) és a (2) szorzatából következik a feladat *a)* része, továbbá a *b)*-beli egyenlőséglánc első fele. A húrnégyszögekre vonatkozó Ptolemaiosz-tétel miatt

$$PT \cdot QT' + QT \cdot PT' = PQ \cdot TT',$$

tehát előbbi megjegyzésünkből következik a *b)* egyenlőséglánc is.



10. ábra

Horváth Géza, Zselic és
K. Tóth György, Békéscsaba

II. megoldás: Az *a)* rész bizonyítása, mint előbb. Jelölje F a TT' húr felezőpontját (10. ábra). Belátjuk, hogy $QFT\triangle \sim QT'P\triangle$, mert ebből

$$\frac{QT}{\frac{TT'}{2}} = \frac{QP}{PT'},$$

és ezzel igazoltuk a *b)* állítást is.

Mivel $CT'A\triangle$ derékszögű és $T'F$ az átfogójához tartozó magasság, ezért a befogótétel miatt

$$CT'^2 = CF \cdot CA.$$

De $CT' = CQ$ miatt előtti egyenlőségünkből

$$\frac{CQ}{CF} = \frac{CA}{CQ} \text{ adódik.}$$

Ezért $CQF\triangle \sim CAQ\triangle$, mert 2-2 oldaluk aránya, és az ezek által bezárt szög egyenlő. Ebből pedig

$$\alpha = CFQ\sphericalangle = CQA\sphericalangle.$$

Így

$$TFQ\sphericalangle = \frac{\pi}{2} + \alpha \quad \text{és} \quad QT'P\sphericalangle = \pi - QTP\sphericalangle = \pi - \frac{QCP\sphericalangle}{2} = \pi - \frac{\pi - 2\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

Ezzel beláttuk QFT és $QT'P$ háromszögek hasonlóságát, hiszen 2-2 szögük egyenlő.

Csányi Péter, Nagykőrös ötlete nyomán

I. megjegyzés: Ez utóbbi megoldásunkból az is következik, hogy a QF egyenes a k kört abban a P' pontban metszi másodjára, amely P-nek az AC egyenesre vonatkozó tükörképe.

II. megjegyzés: Ha $A \in k$, akkor *a)* és *b)* triviálisan érvényes. Ha A ideális pont és P, Q egyike sem a T, T' pontok valamelyike, akkor $PT:TQ = 1$, hiszen ekkor a $TPT'Q$ derékszögű deltoid. Ha P és Q azonos T, T' valamelyikével, akkor az *a)* résznek nincs értelme, a *b)* viszont teljesül most is.

Horváth Géza, Zselic

A megoldók száma: 23.

A megoldók névsora (927—932.)

Bartha Gábor, Szentendre (927—932.); Bencze Mihály, Brassó (927., 929.); Bodnár György, Szerencs (930—931.); Burus Csaba és Burus Katalin, Székelyudvarhely (927., 929—932.); Csányi Péter, Nagykőrös (930.); Dániel Gyula, Vác (927.); Filetóth István, Nyíregyháza (931.); Gaál László, Valkó (927—932.); Hárspatakiné Dékány Veronika, Budapest (930., 932.); Horváth Géza, Zselic (930—932.); Illésy Istvánné, Kiskunfélegyháza (928., 930—931.); Imolya Sándor, Hódmezővásárhely (929., 931.); Kacsó Ferenc, Marosvásárhely (927—932.); Kamarás Lajos, Pécs (927., 928. 2 mód, 929—932.); Kozmáné Tegez Rita, Tatabánya (929—930.); K. Tóth György, Békéscsaba (930—932.); Mészáros József, Galánta (927., 929—932.); Molnár József, Szombathely (930., 932.); Nagy Vilmos, Gyergyó (929., 932.); Nyíró László, Mezőkövesd (927—932.); Oláh György, Komarno (927., 929—930., 932.); Polcz Katalin, Pécs (927—932.); Schandl Gábor, Zalaegerszeg (932.); Schutzbach Mártonné, Siófok (930.); Sugár György, Budapest (928., 929. két mód. 930—931., 932. két mód); Szabó Zsófia, Békéscsaba (930—932.); Szánthó Gyula, Gyula (929—932.); Sziky Csilla, Budajenő (929—932.); Tuzson Zoltán, Marosvásárhely (927. három mód, 929—930., 932.); Ungvári Jánosné, Debrecen (927., 929—932.); Vermes Miklós, Budapest (930., 932.); Zalán Péterné Budapest (927—932.).

4,50 Ft

Javasolt szakirodalom a Tankönyvkiadó kiadványai közül

Munkaközösség: *Feladatgyűjtemény matematikából az érettségi vizsgához* (8178) 29,50

Egleszné—Kovácsné—Radnainé—Sztrókayné: *Tanári kézikönyv. Általános iskola. Matematika 6.* (83 020) .... 39,—

M. Bartal—Pálfalviné: *Tankönyvi útmutató a gimnázium II. osztályos matematika munkatankönyvhöz* (84 070) .... 7,—

Dr. Kőhegyi Jánosné—Vajda József: *Egyéni matematikatanulás osztályközösségben.* Feladatgyűjtemény tanárok számára az általános iskola 8. osztályának matematika-oktatásához (52 681) .... 16,—

Bartal—Jakab—Kántorné: *Ismerkedés a kísérleteinkkel.* Új utak a matematika tanításában (52 522/4) 29,50

Hámori Miklós: *Halmazok. Matematikai logika* (1991) .... 9,—

Kovács M.: *Néhány kibernetikai játékgép.* Bevezetés az automaták tervezésébe (29 184) 11,50

Hámori Miklós: *Ismerkedés a komputerrel.* Számítástechnika I. az általános és középiskolai tanulók számára (29 205) .... 10,—

Kovács Győző: *Számítógépek technikája.* Számítástechnika III. (29 217) 12,50

Máté László: *Sorozatok, sorok* (29 243) .... 12,—

Vigassy Lajos: *Egybevágósági transzformációk a síkban és a térben* (29 247) 9,50

Bognárné—Nemetz—Tusnády: *Ismerkedés a véletlennel* (29 253) .... 17,—

Péter Rózsa: *Játék a végtelennel. Matematika kívülállóknak* (52 489) .... 31,—

Sain Márton: *Matematikatörténeti ABC* (52 659) .... 35,—

Élő matematika 1. Tanulmányok. Szerkesztő: Gádor Endréné (92 347/1) .... 18,—

Jánossy—Tasnádi: *Élő matematika 2. Valószínűségszámítás* (92 347/2) .... 6,—

Gergely—Hódi és mások: *Élő matematika 3. A lánctörtektől a számítógépig* (92 347/3) .... 13,—

Korányi Erzsébet: *Élő matematika 4. Használjuk a differenciálszámítást!* (92 347/4) .. 18,50

Felvételi feladatok: matematika, fizika, szabadkézi rajz. Szerkesztette: Pálfai Pál (8159) .... 108,—

Dr. Scharnitzky Viktor: *Egyetemi felvételi feladatok matematikából.* 1974—1976. IV. kötet (8158/IV.) 18,50

Ligeti—Mosoni: *Törd a fejed, érdemes!* Matematikai feladatgyűjtemény az általános iskolai tanulók számára (1908/1) .... 10,—

Magyar Felsőoktatási Intézmények Tájékoztatója (93 141) .... kb. 45,—

Beszerezhetők
a 17. Pedagógus-könyvesboltban (1053 Bp., Múzeum krt. 3.),
a 44. Könyvesboltban (1052 Bp., Deák F. u. 15.)

INDEX: 25 565